Capítulo 8

SECCIONES, INTERSECCIONES Y SOMBRAS

Las formas más comunes de los elementos industriales son derivadas de las formas elementales que hemos estudiado en el capítulo anterior. Mediante sección por planos, intersección, unión y resta de varias de ellas se suelen construir una gran mayoría de formas industriales. El principal motivo es la mayor sencillez de fabricación y control que permiten estas superficies elementales. En el presente capítulo vamos a estudiar las operaciones de sección e intersección, las cuales permiten a su vez realizar las de unión y diferencia. También vamos a estudiar las sombras proyectadas por un sólido cuando le incide luz con una dirección dada con foco en el infinito: la sombra propia sobre su misma superficie y la sombra proyectada sobre otras superficies a las que priva de iluminación.

Secciones

Se llama *sección* de un sólido por un plano a la figura plana común a ambos. Estas secciones, por ser objetos intrínsecamente planos, son definibles por la curva plana que los limita. Esta queda, pues, unívocamente representados en el sistema diédrico por las proyecciones del contorno. Estudiaremos a continuación los diferentes métodos de hallar las secciones de sólidos tomando como ejemplo la sección de una pirámide por un plano tal y como se muestra en la figura 1.

Un primer método de encontrar la sección de un sólido por un plano consiste en hallar las intersecciones de las aristas o generatrices con el plano. Así, en la figura 2 se muestra las sección hallada uniendo los puntos intersección de las aristas de la pirámide con el plano. Para encontrar estos puntos se ha recurrido a realizar un cambio de plano vertical de proyección de forma que el plano secante fuese proyectante sobre uno de los planos de proyección del nuevo diedro.

En el caso de la figura 2, al quedar el plano secante de canto, las intersecciones de las nuevas proyecciones verticales de las aristas con la nueva traza vertical del plano secante son las proyecciones verticales (en el nuevo diedro) de los vértices del polígono sección buscado. Basta pues trazar perpendiculares a la nueva línea de tierra desde estos puntos hasta encontrar sus proyecciones horizontales situadas sobre las proyecciones horizontales de las aristas. Basta entonces recontruir la proyección vertical antigua para tener la sección completamente definida.

Teóricamente sería posible también hallar la sección calculando la intersección de los planos de las caras con el plano secante pero esto implica la determinación de esos planos a partir de las propias aristas. En general el proceso sería laborioso exceptuando los casos en que se conozcan de antemano los planos de las caras.

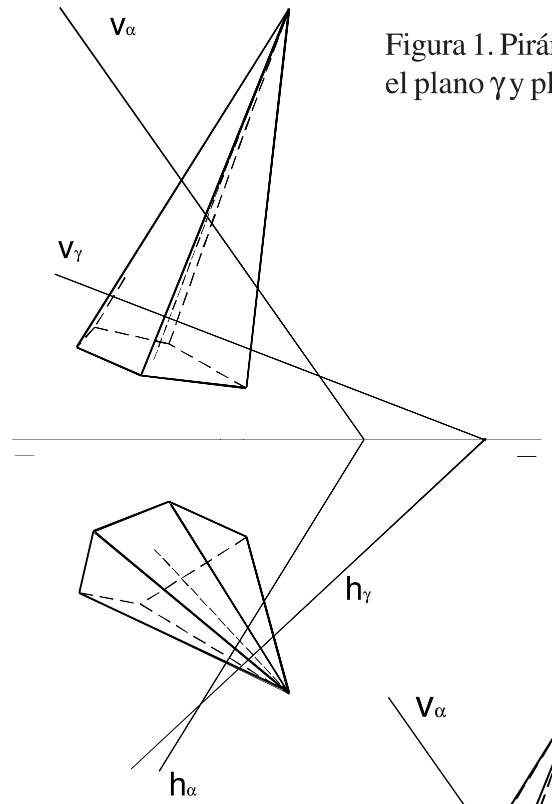


Figura 1. Pirámide con base en el plano γ y plano secante α.

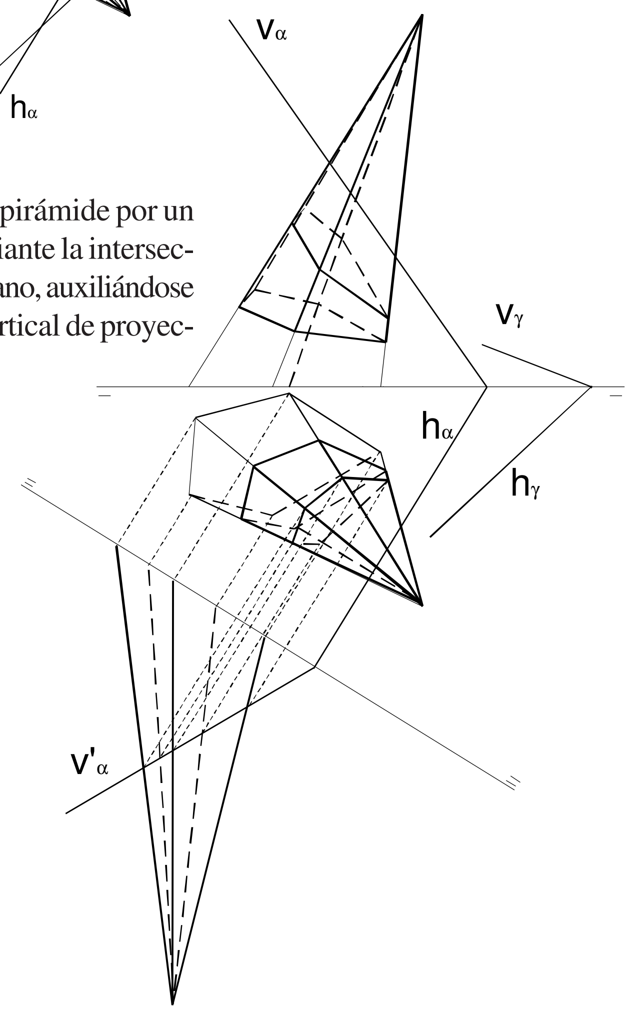


Figura 2. Sección de una pirámide por un plano. Se ha hallado mediante la intersección de las aristas con el plano, auxiliándose de un cambio de plano vertical de proyección.

Otro método alternativo mucho más potente es el empleo de las propiedades de la homología que guardan entre sí las secciones planas de una misma superficie radiada, las cuales serán estudiadas a continuación.

Homología y afinidad

Dados dos planos α y α', un par de puntos A de α y A' de α' se dicen *homólogos* con *centro de homología* en V si A, A' y V se encuentran alineados. En general, dos figuras planas -como los triángulos ABC y A'B'C' en la figura 3- son homólogas con centro en V si sus puntos lo son dos a dos con el mismo centro. Se llama *eje de homología* a la recta *e* intersección de los planos α y α'. Cada punto de esta recta es homólogo de sí mismo. De otra manera se dice que es una *recta doble* y *e* coincide con *e'*. Obsérvese, pues, que una recta y su homóloga se cortan necesariamente en un punto del eje de homología. Consecuentemente, si una recta es paralela al eje, su homóloga también lo será.

Otras rectas especiales son las llamadas *rectas límites l* y *ll*' que son homólogas del infinito. Así, en la figura 3 se puede observar como la recta *l,* intersección del plano α con otro plano β' paralelo a α' y que pasa por V, es homóloga de los puntos impropios (infinitamente alejados de V) en el plano α'. Se puede, por ejemplo, comprobar cómo la recta definida por un punto cualquiera en *l* y el centro de homología V es paralela al plano α', o lo que es lo mismo lo corta en el infinito. De la misma forma, la recta *ll',* intersección del plano α' con un plano β paralelo a α y que pasa por V, es homóloga de los puntos impropios (infinitamente alejados de V) en el plano α. Si unimos un punto de la recta *ll'* con el centro V, la recta así trazada corta al plano α en el infinito. Por ello, como dos rectas paralelas contenidas en el plano α se cortan en el infinito dentro de este mismo plano α, sus homólogas se cortarán en la recta límite *ll'*. Recíprocamente, dos rectas del plano α que se cortan en un punto de la recta límite *l* tendrán sus homólogas paralelas entre sí.

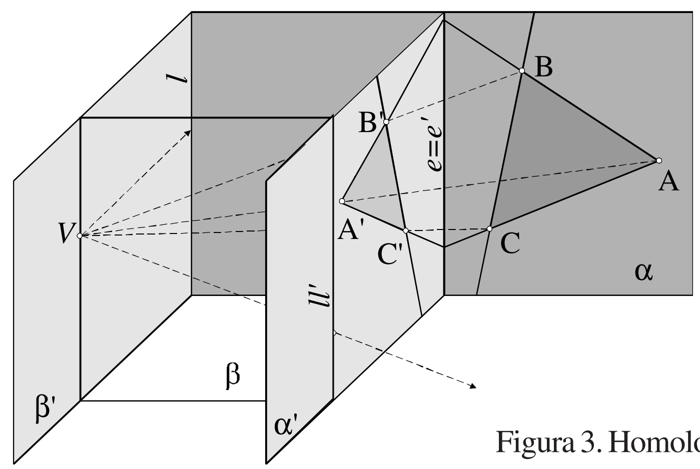
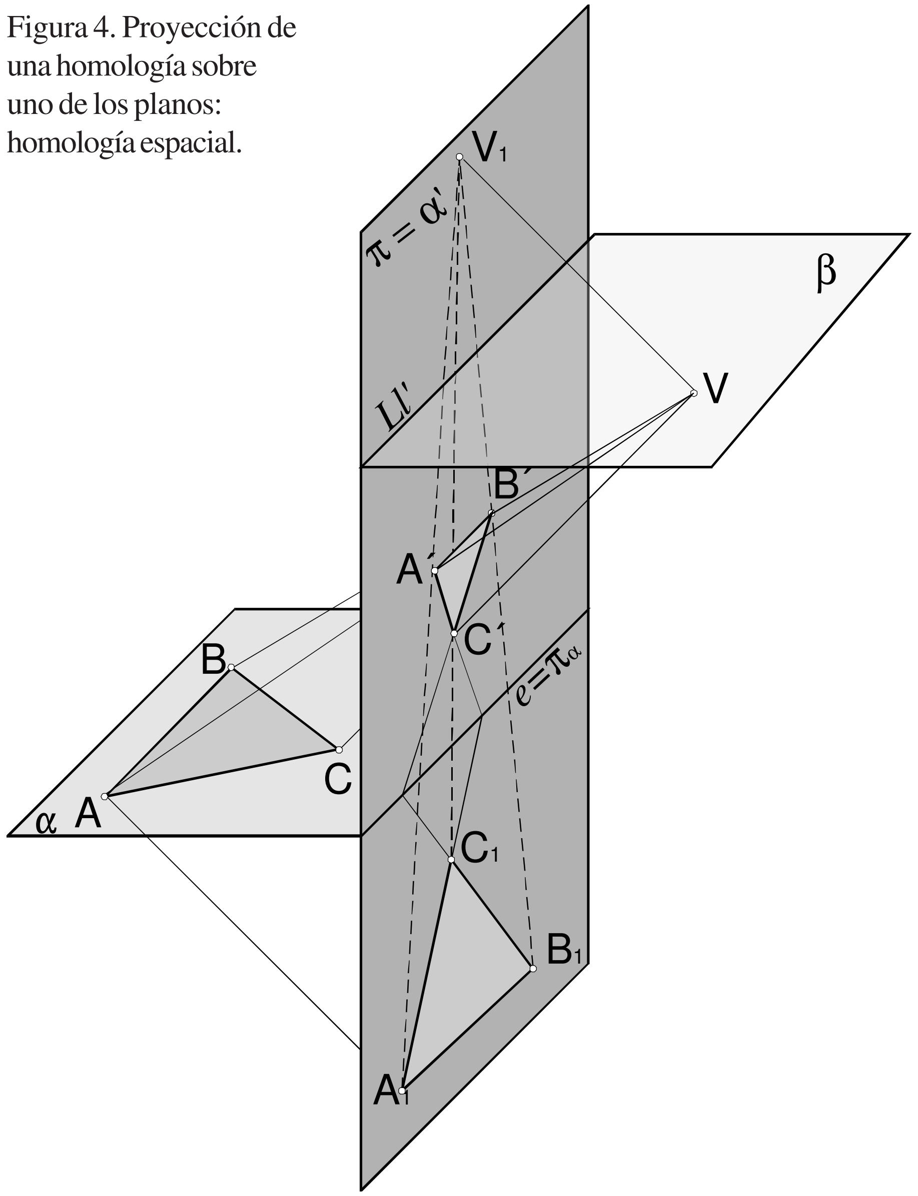


Figura 3. Homología espacial.

Por su propia definición, las secciones por dos planos α y α' de una superficie radiada con vértice V serán homólogas con centro de homología en V. Los pares de puntos homólogos (por ejemplo A-A') se encontrarán en las mismas rectas generatrices.

Si los planos α y α' son paralelos la homología toma el nombre de *homotecia*. Si el centro de homología se lleva infinitamente lejos la relación se dice que es una *afinidad*.

Figura 4. Proyección de una homología sobre uno de los planos: homología espacial.



Homología plana

Entre las propiedades de las proyecciones vimos en el capítulo 2 que la proyección de una recta es otra recta. Esto implica que las proyecciones sobre un mismo plano de dos puntos homólogos deben seguir estando alineadas con la proyección del centro de la homología inicial puesto que las rectas generatrices se proyectarán también como rectas. Diremos pues que existe una nueva relación de homología plana entre las proyecciones sobre un plano π, no perpendicular al eje, de dos figuras homólogas con centro en V. Los elementos de la homología plana son pues: el eje de la homología (recta proyección del eje espacial), el centro de homología (proyección del punto del mismo nombre) y las rectas límites (proyecciones de *l* y *ll'* sobre π). Las propiedades de la homología espacial siguen cumpliéndose entre su proyección plana. Así, un punto, su homólogo y el centro de homología se encuentran alineados; la intersección de dos rectas homólogas se encuentra necesariamente en el eje; las homólogas de dos rectas paralelas se cortan en la recta límite.

Nótese podemos considerar cualquier homología plana como una homología espacial en la cual coinciden los planos α y α' y a su vez contienen al centro de homología y que viene definida por la posición de las rectas límite *l* y *ll'*. El hablar sin más de homología entre dos figuras o dos elementos en el mismo plano es ambiguo puesto que una misma figura podríamos considerarla como perteneciente al plano α o al plano α'. Por ello, al definir la homología plana hay que identificar convenientemente las rectas límite. La mayoría de los autores habla de elementos originales y de elementos homólogos derivados de estos y numera las rectas límites. Si los primeros se encuentran sobre α y los segundos sobre α', a *l* se le llama *primera recta límite* y a *ll' segunda recta límite*. Un caso interesante de homología plana es aquel en que *l* coincide con *ll'* en cuyo caso figuras homólogas son figuras idénticas.

Hay que señalar que una homología plana puede así derivarse de una infinidad de homologías espaciales. Para obtener una basta tomar el centro de la homología espacial en la perpendicualar a π que pasa por el centro de la plana. Una vez fijado este todo lo demás queda definido.

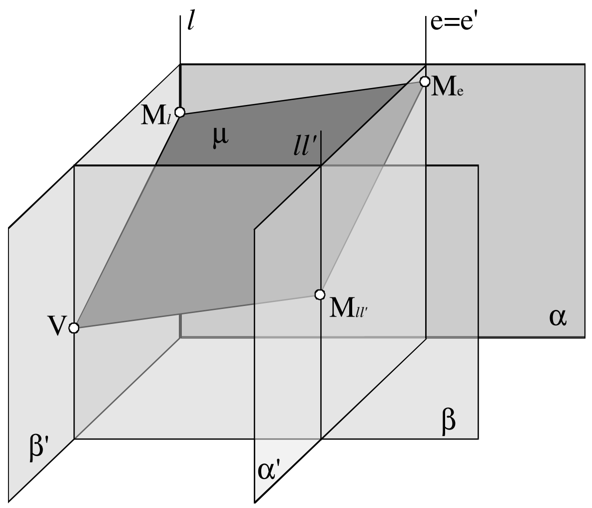


Figura 5. Trazas con un plano de los elementos de una homología.

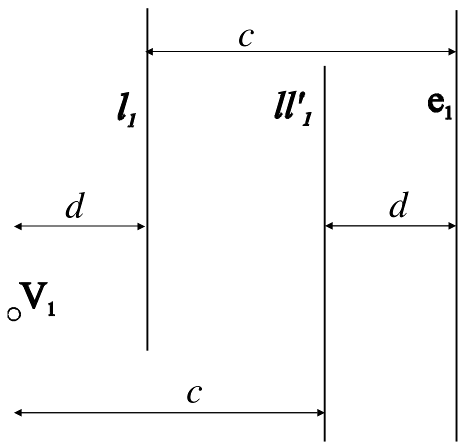


Figura 6. Elementos de la homología plana.

Debido al paralelismo de los planos α y β y de los planos α' y β', la intersección de estos cuatro planos con cualquier otro plano μ que pase por el centro V de la homología espacial es un paralelogramo. En la figura 5 se muestran las trazas de estos planos con el plano μ. Los vértices de este paralelogramo son, en primer lugar, el centro V de la homología espacial. Su vértice opuesto es el punto M_e, traza con μ del eje *e* de la homología espacial. Los otros dos vértices M_l y $M_{ll'}$ son las trazas con el plano μ de las rectas límite *l* y *ll'*. Esto hace que, en las homologías planas -proyecciones de homologías espaciales-, la distancia del centro a la recta límite *ll'* es igual que la de *l* al eje; o que la distancia de *l* al centro es igual que la del eje a *ll'*. Esta propiedad permite definir una homología plana a partir de tan solo tres elementos, reconstruyendo el cuarto empleando estas propiedades.
Debemos, así mismo, destacar que la abatida de una figura sobre el plano de una homóloga guardará una relación de homología plana con esta, por ser el abatimiento equivalente a una proyección con dirección ortogonal al bisector de los planos homólogos.

Todo lo dicho es válido además para el caso en que el centro de la homología espacial esté infinitamente alejado, esto es para el caso de una afinidad. Nótese, como se muestra en la figura 7, que la dirección de la afinidad plana obtenida como proyección de la espacial no tiene por qué ser perpendicular al eje de afinidad -intersección de los planos de las figuras afines.

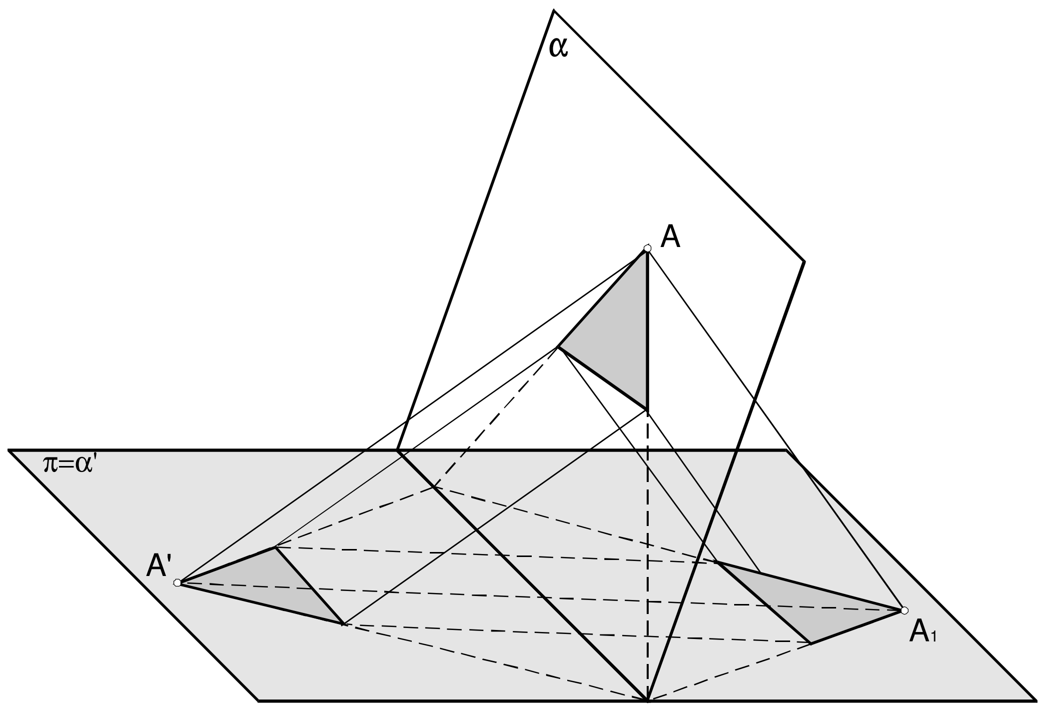


Figura 7. Afinidad. Proyección sobre uno de los planos.

Proyección de secciones

Según lo que acabamos de exponer, las proyecciones sobre un plano de dos secciones cualesquiera de una superficie radiada y sus abatidas sobre el mismo plano guardan una relación de homología plana. Así, las proyecciones sobre un plano de dos secciones diferentes de una pirámide -que corten todas las aristas- guardan una relación de homología, con centro en la proyección del vértice y eje la proyección de la recta intersección de los planos secantes. Las rectas límite vendrán determinadas por los planos secantes y el vértice (centro de homología) según ya hemos expuesto (figura 8). En particular podemos considerar la base de la pirámide como otra sección plana de la figura radiada por lo que también será homóloga de aquellas secciones que corten todas las aristas.

Si se conoce, pues, la proyección (horizontal o vertical) de una sección de una superficie radiada -o en particular la sección por el plano horizontal- lo habitual, para construir otra sección es aplicar las relaciones de homología entre segmentos. El eje de la relación de homología que guardan será la proyección de la recta intersección de los planos secantes y el centro la proyección del vértice de la superficie.
También es posible, conocida la figura inicial, el eje, el centro de homología y el homólogo de un punto, hallar los demás mediante el procedimiento recursivo de prolongar los segmentos iniciales que contienen puntos conocidos hasta cortar el eje. Entonces las rectas homólogas pasan por dicho punto del eje y los homólogos desconocidos deben estar a su vez en rectas que unan el centro de homología con los puntos originales.

Si queremos hallar la sección abatida en verdadera magnitud podemos también aplicar la relación de homología entre la proyección de las secciones y la abatida conforme se muestra en la figura 9.

En el caso de secciones de un prisma o de un cilindro, el vértice está en el infinito por lo que la relación entre secciones se convierte en una relación de afinidad. El procedimiento será igual, con la única salvedad de encontrarse puntos afines alineados en la misma dirección, en lugar de alineados con un centro de homología ahora inexistente (o infinitamente alejado).

Merece la pena destacar que las secciones de una superficie radiada son homólogas o afines siempre y cuando no corten a las bases. Esto, en cualquier caso se puede comprobar al ir trazando la sección.

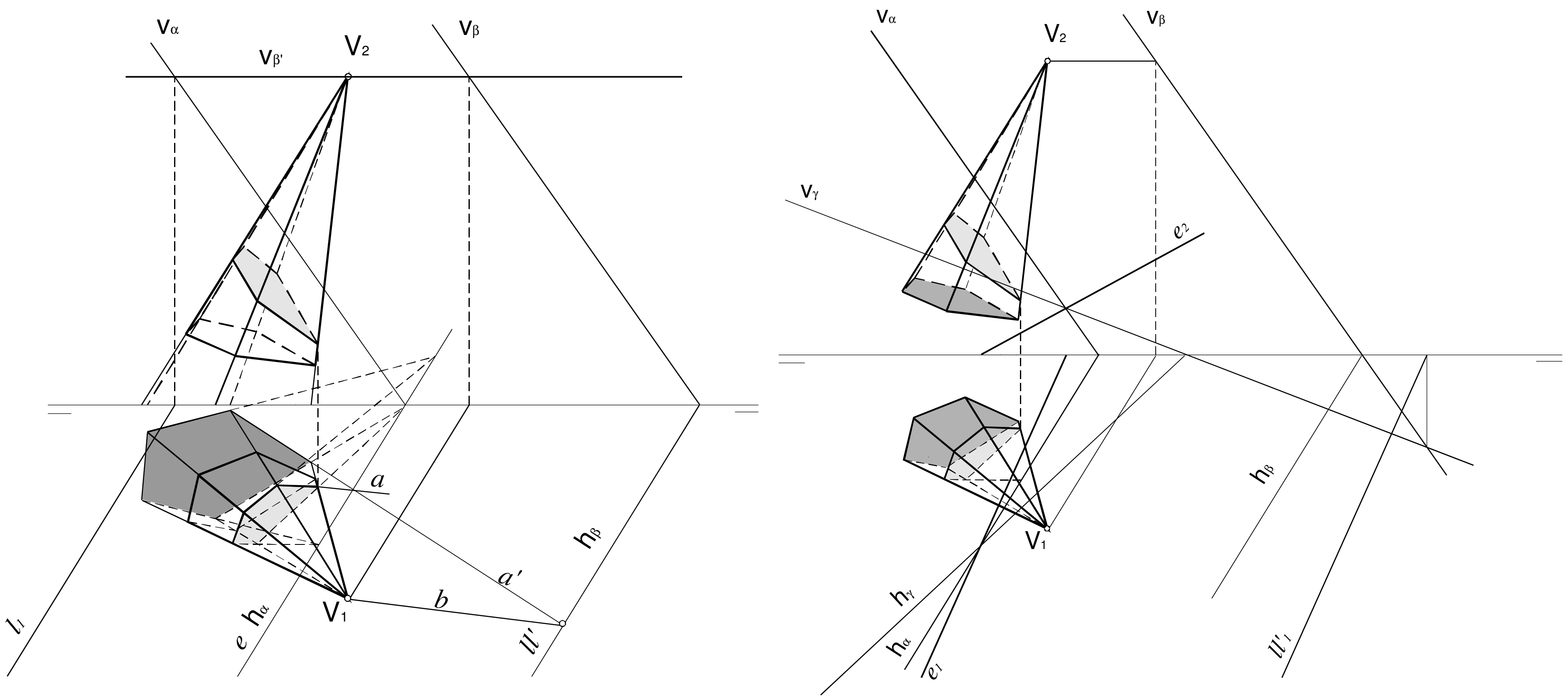


Figura 8. Cálculo de la sección de una pirámide por homología. A la izquierda se muestra en procedimiento aplicando la relación de homología con la sección por el plano horizontal de la figura radiada. La primera operación que se ha realizado ha sido el cálculo de esta sección fictícea por el plano horizontal, para lo cual se han prolongado las proyecciones verticales de las aristas de la pirámide hasta cortar la línea de tierra hallando así las trazas horizontales de las aristas. Estas constituyen los vértices del polígono sección por el plano horizontal.
La relación de homología existente entre el plano horizontal y el plano α secante tiene el eje de la homología plana en la traza horizontal del plano secante h_α y su vértice en la proyección horizontal V_1 del vértice de la pirámide. La recta límite *ll'* es la traza horizontal del plano β paralelo al secante α que pasa por el vértice V. La otra recta límite l_l es la proyección de la recta horizontal intersección de α con el plano β ' horizontal que pasa por V.
Para calcular, entonces, la recta *a* homóloga de la *a'*, prolongamos esta hasta cortar a *ll'* y, desde este punto, trazamos la recta auxiliar *b* hasta V_1. La recta *a* que buscamos será paralela a *b* y cortará a *a'* sobre el eje de afinidad.

A la derecha se muestra el trazado de la sección por α mediante homología con la base en γ. El eje de la homología entre las proyecciones horizontales es la proyección horizontal de la intersección entre ambos planos. El vértice es la propia proyección V_1 del vértice. La recta límite ll'_l es la recta paralela al eje intersección del plano β con γ.

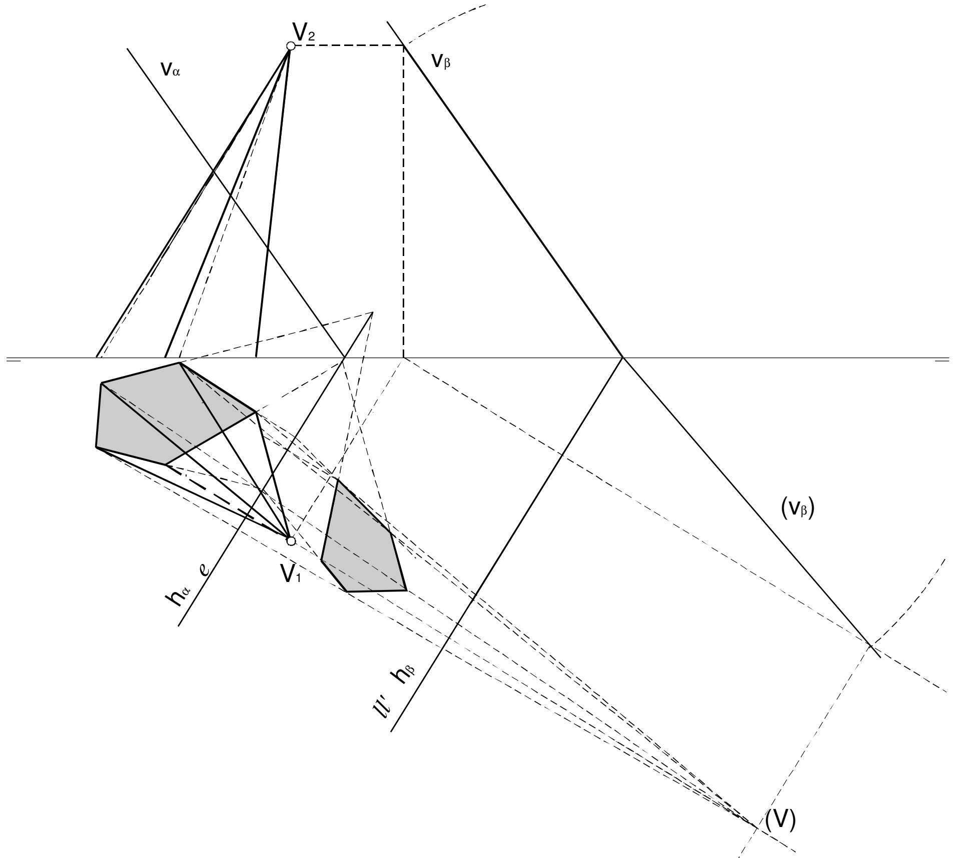


Figura 9. Cálculo directo de la verdadera magnitud de la sección de una pirámide mediante homología. En este caso la relación dehomología se establece entre la sección por el plano horizontal y el vértice de la pirámide -contenido en el plano β paralelo al secante -abatido sobre el horizontal. El eje de homología sigue siendo la traza horizontal del plano α secante.

Figura 10. Sección de un cono recto por un plano de canto. La sección es una elipse de ejes AB y CD. El eje AB aparece en verdadera magnitud en su proyección vertical, mientras que para hallar el CD nos auxiliamos de una sección por un plano horizontal que pase por O, centro de la elipse que resulta de la sección.

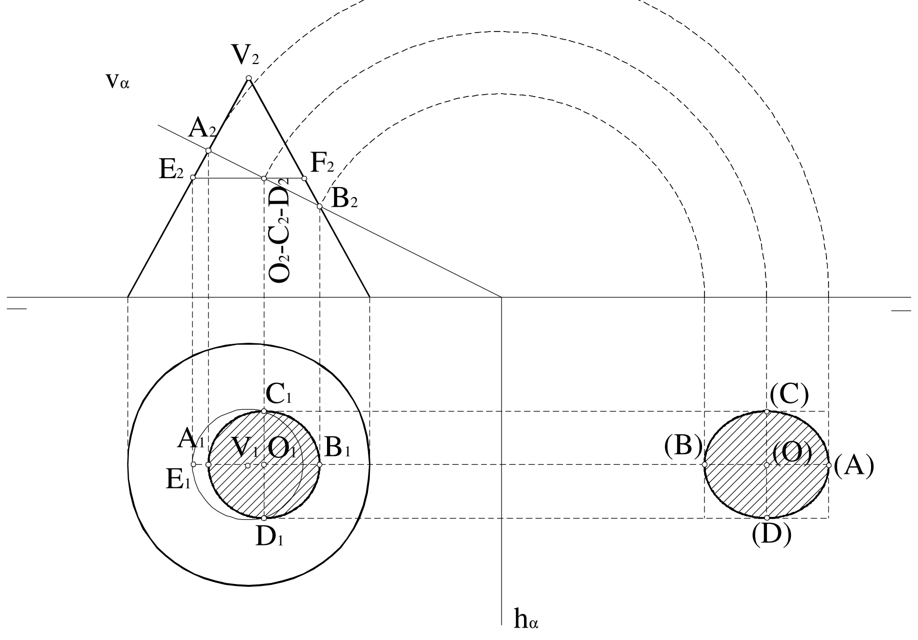


Figura 11. Sección de un cono recto por un plano de canto. Caso parabólico.

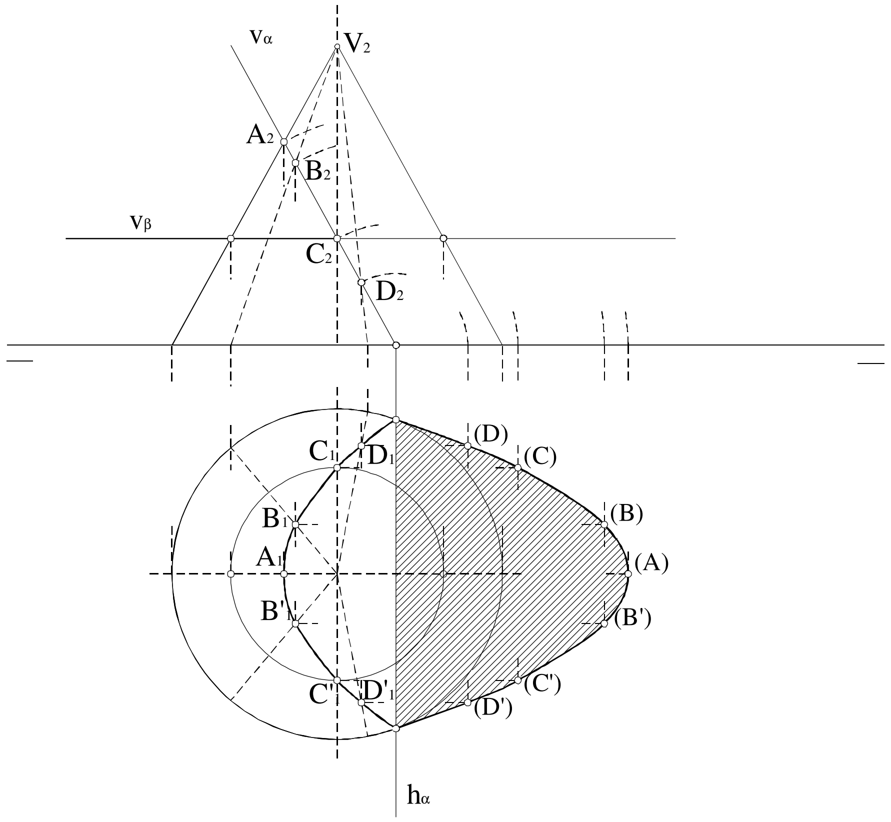
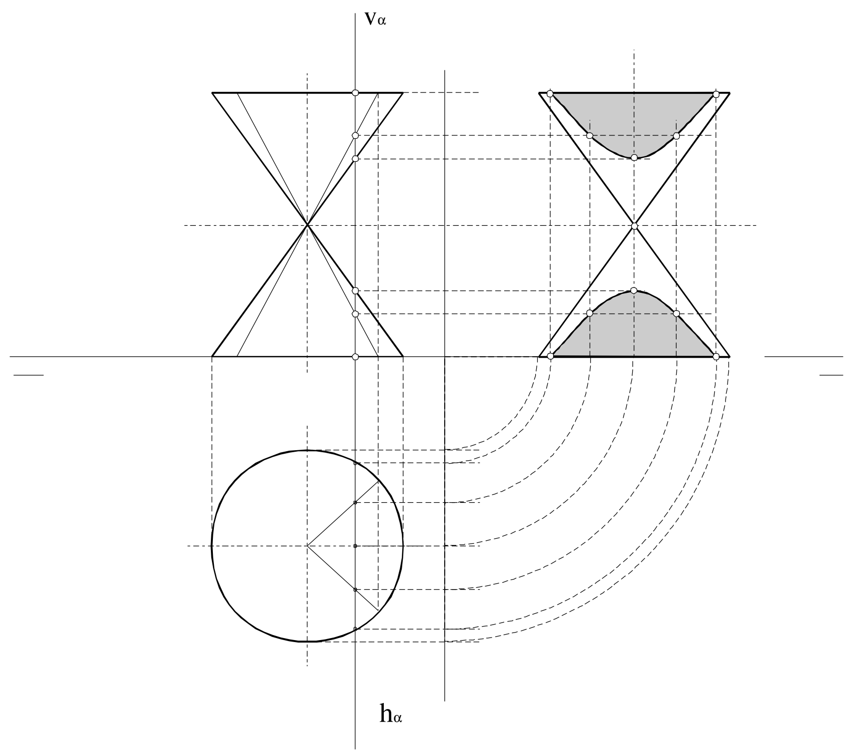


Figura 12. Sección de un cono por un plano. Caso hiperbólico.



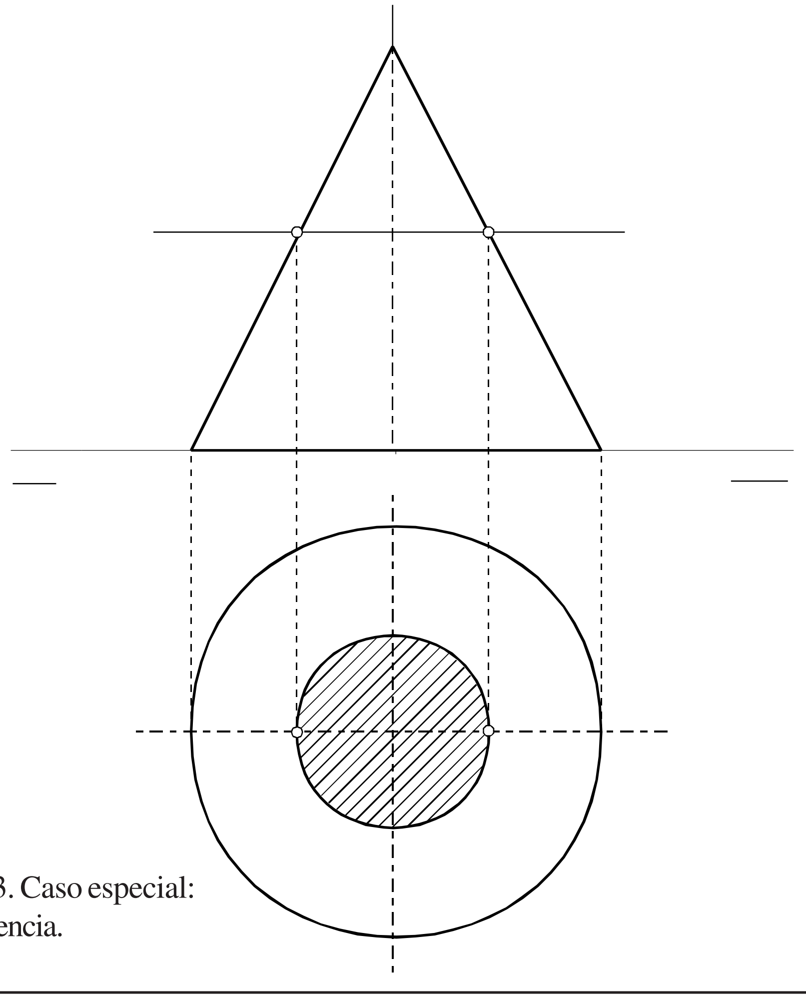


Figura 13. Caso especial: circunferencia.

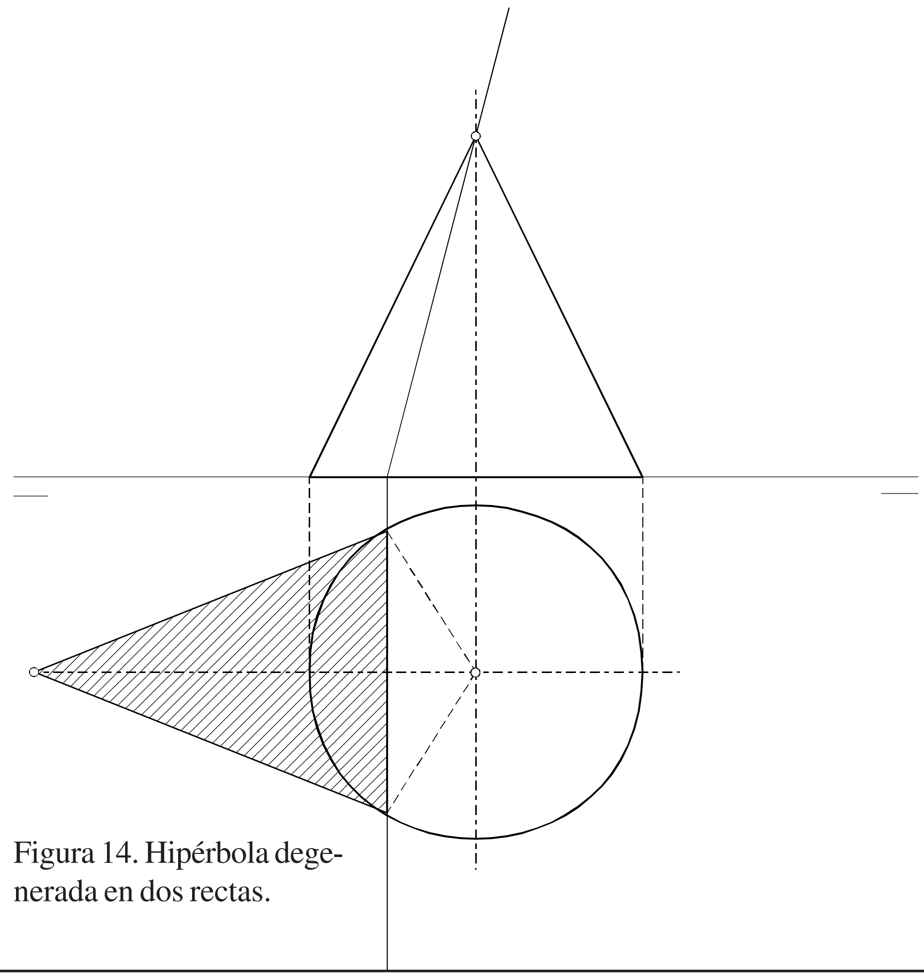


Figura 14. Hipérbola degenerada en dos rectas.

Secciones del cono

Conforme a lo expuesto en el último punto, todas las secciones de un cono regular (recto y con base circular) son homólogas de la circunferencia. En las figuras 10 a 14 se muestra la sección de un cono regular con base en el plano horizontal por diferentes planos de canto. La sección, en el caso de la figura 10 en que la perpendicular al plano secante en el vértice es interior al cono, es una elipse de ejes principales paralelo y perpendiculara la traza horizontal del plano secante. En la figura 11, con plano secante paralelo a una generatriz del cono, la sección es una parábola. En la figura 12, con la perpendicular al plano secante en el vértice exterior al cono o lo que es lo mismo plano secante paralelo a dos generatrices, produce una hipérbola. Se muestra en esta última figura el caso particular de un plano paralelo al eje del cono. En la figura 13 se muestra un caso especial de plano secante paralelo a la base que por tanto produce una sección homotética de la circunferencia, es decir, otra circunferencia. En la figura 14 se muestra un caso degenerado de hipérbola: el triángulo que produce cualquier plano secante que contenga al vértice.

A estas tres curvas: elipse, parábola e hipérbola se les denomina por su origen *cónicas*. Podríamos, pues decir que las cónicas son las curvas homólogas de la circunferencia. Podemos en general llamar *ejes de la cónica* a sus ejes de simetría, paralelo y perpendicular a la intersección del plano secante que los genera y la base del cono regular seccionado. Debido a la reciprocidad de la relación de homología las cónicas son homólogas entre sí y por tanto las secciones planas de una superficie cónica que tenga como sección (en particular su base sea o no recto el cono) una curva cónica serán también cónicas.

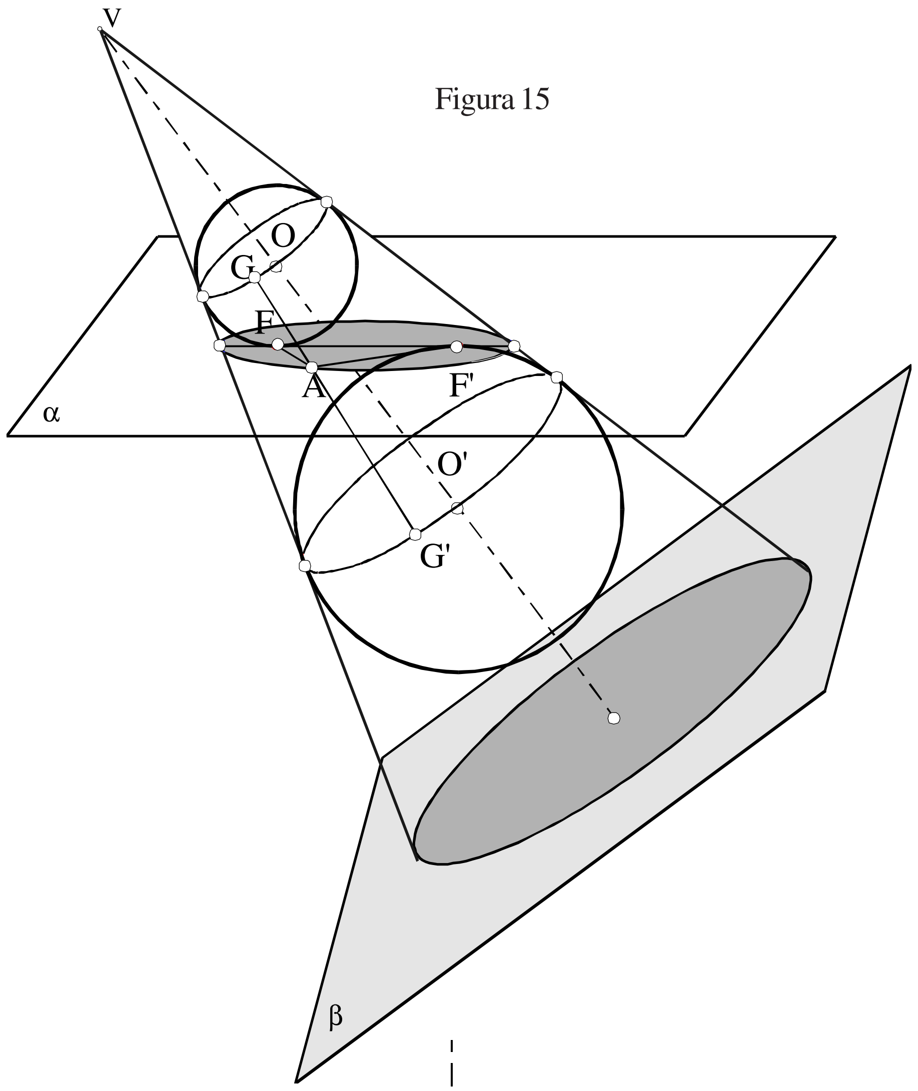


Figura 15

Teorema de Dandelin

Los focos de la cónica resultante de la sección de un cono regular se encuentran en los puntos de tangencia de las dos esferas inscritas en el cono y tangentes al plano.

La demostración puede hacerse como se muestra en la figura 15. Tomemos una generatriz del cono , de forma que G y G'son los puntos de tangencia con las dos esferas inscritas en el cono. Sea A el punto intersección de esta generatriz con el plano secante. Este punto A es por consiguiente un punto de la elipse. Debido a que AG es tangente a la esfera, la distancia de este punto al punto G es igual a la longitud de cualquier otro segmento que, con extremo en A, sea tangente a la esfera centrada en O. En particular, en el mismo plano secante tendremos que el punto F de tangencia se encontrará a la misma distancia de A que el punto G.

El mismo razonamiento aplicado a la esfera centrada en O' lleva a la deducción de que la distancia GG' que es independiente de la generatriz elegida es igual a la suma de las distancias FA+F'A, lo cual demuestra que F y F' son los focos de la elipse.

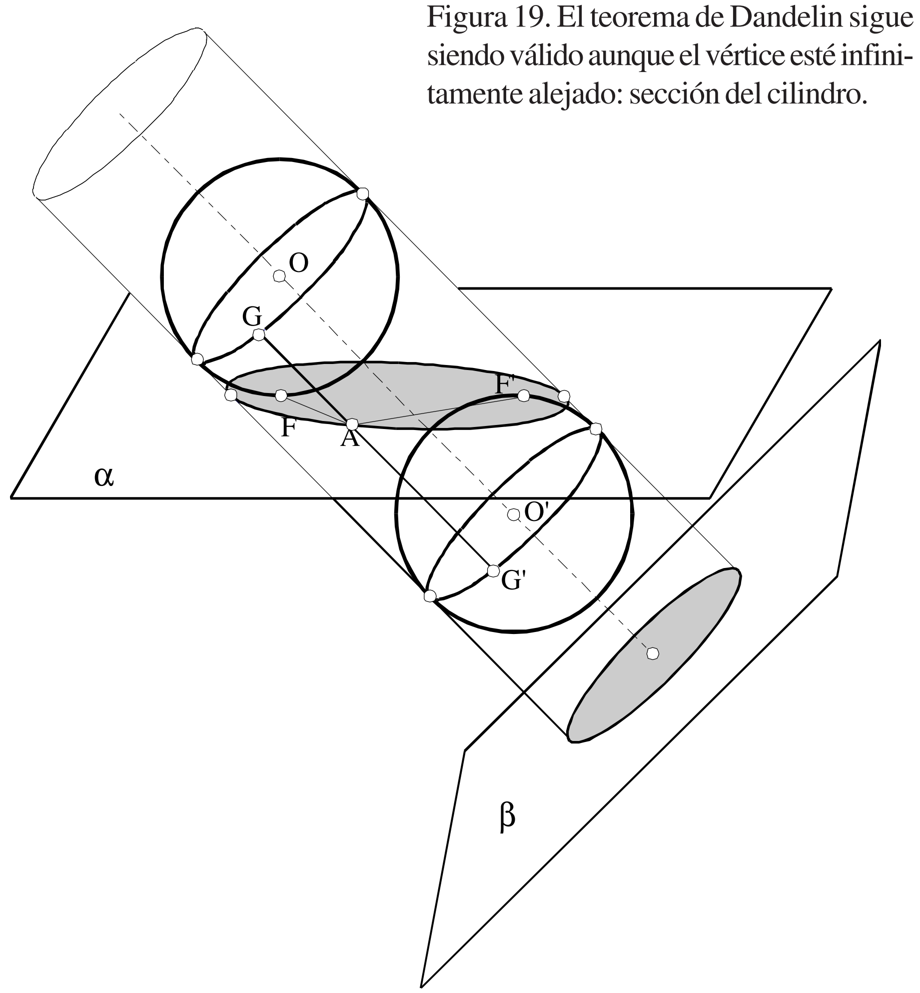


Figura 19. El teorema de Dandelin sigue siendo válido aunque el vértice esté infinitamente alejado: sección del cilindro.

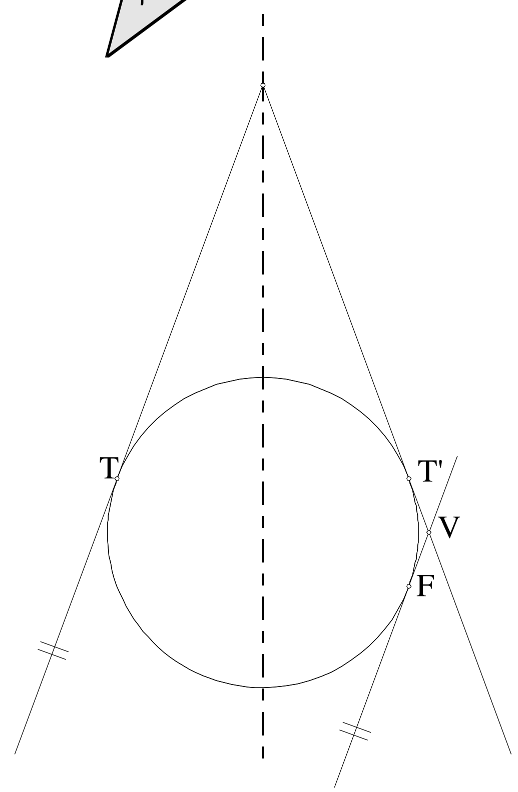


Figura 16. Caso parabólico

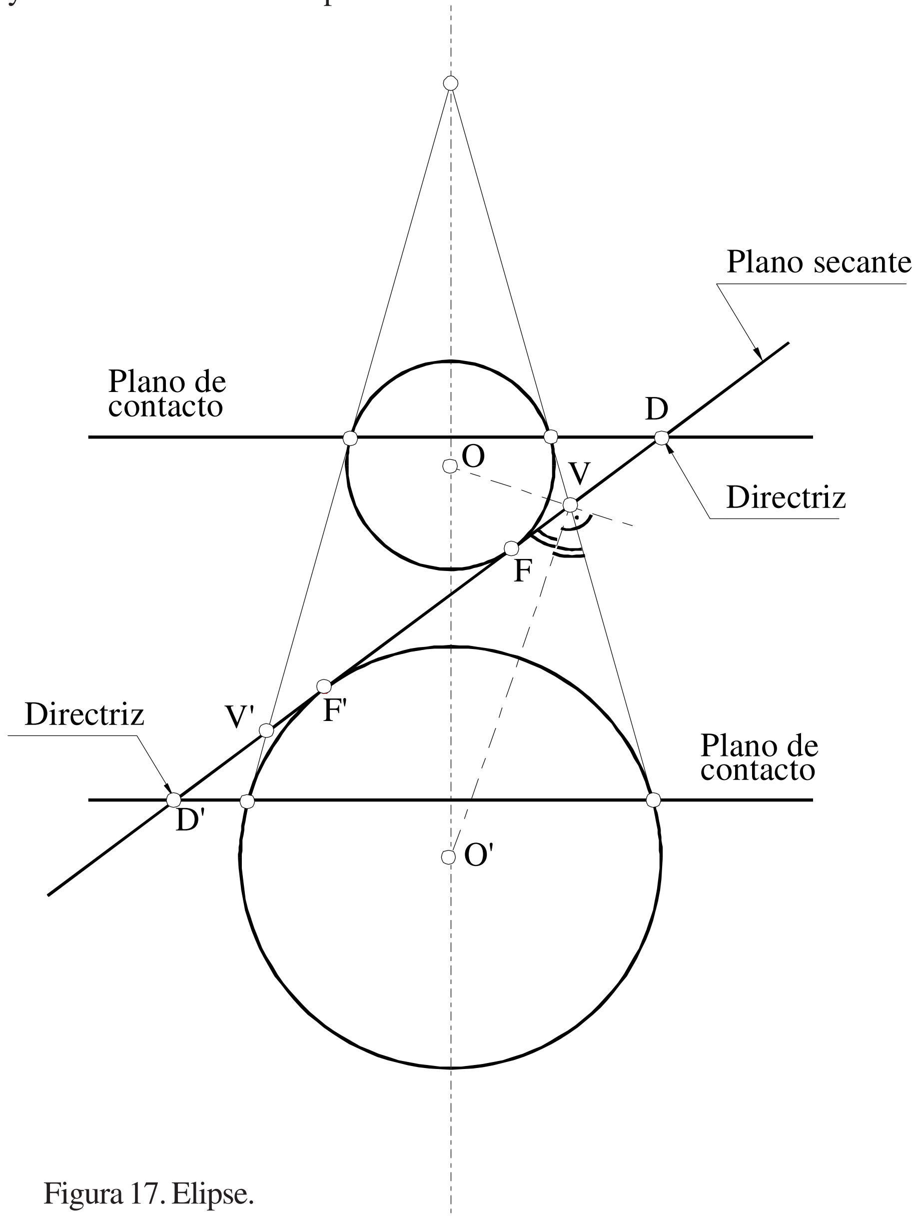


Figura 17. Elipse.

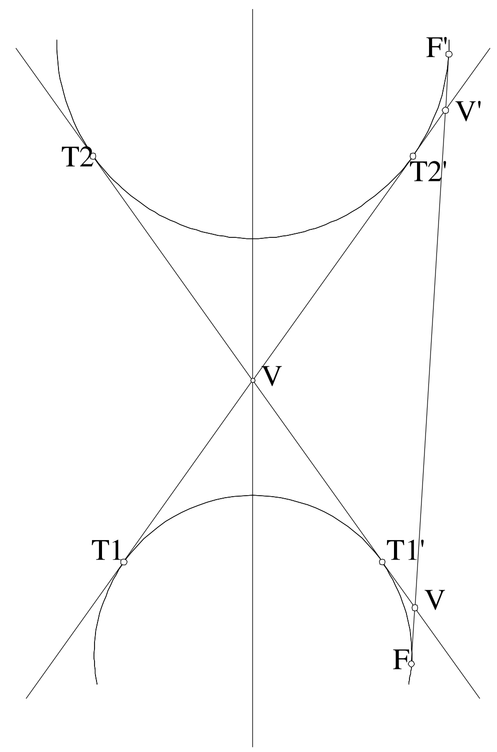
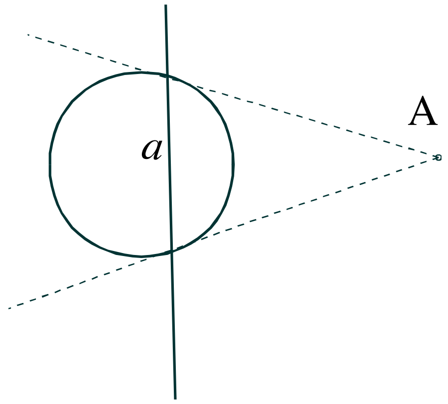
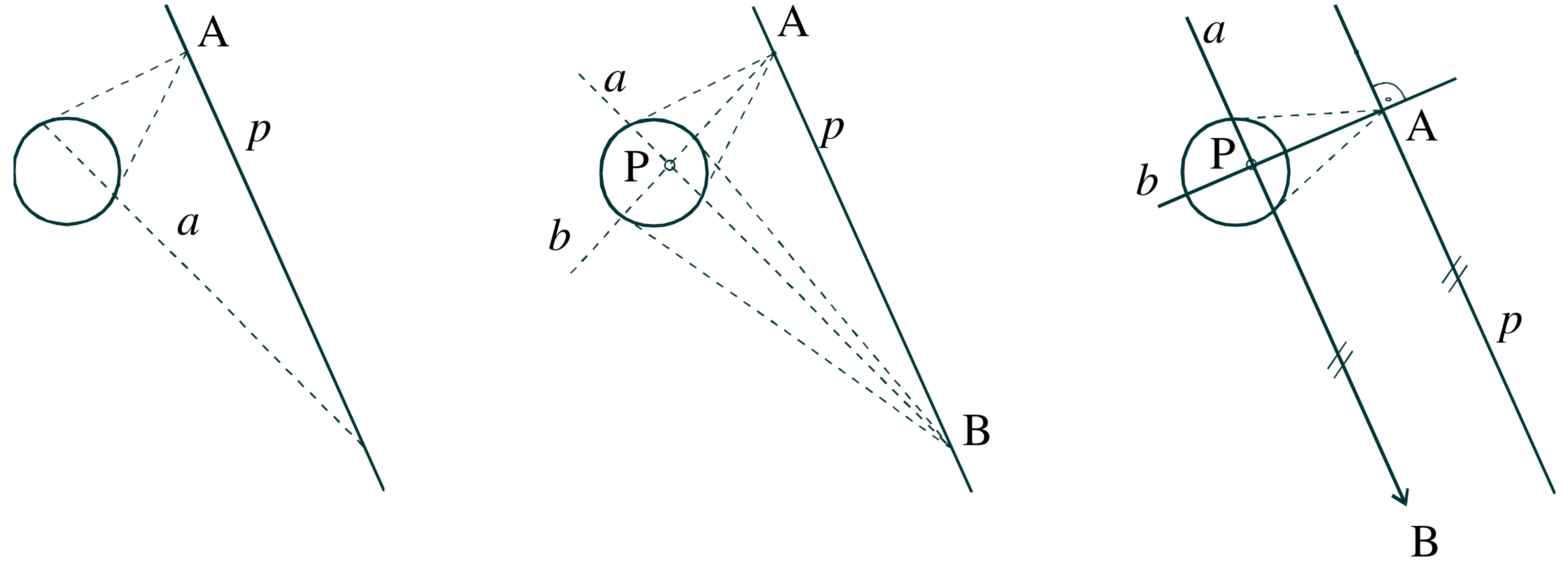


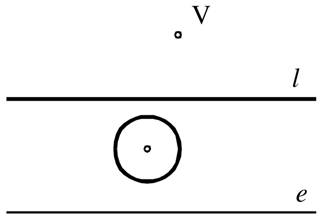
Figura 18. Hipérbola.

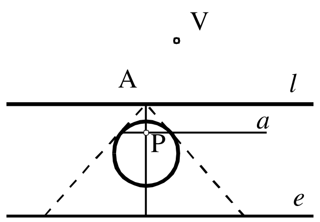
Se llama recta r polar de un punto A respecto de una circunferencia a la recta definida por cortar sobre la circunferencia a las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por A.



Se llama polo de una recta p respecto de una circunferencia, al punto P tal que, si trazamos desde un punto A arbitrario de la recta su polar y desde el punto B de intesección de esta con p trazamos, de nuevo, su polar; P es intersección de estas dos rectas a y b polares de A y B. Se dice que estas dos rectas a y b son conjugadas.







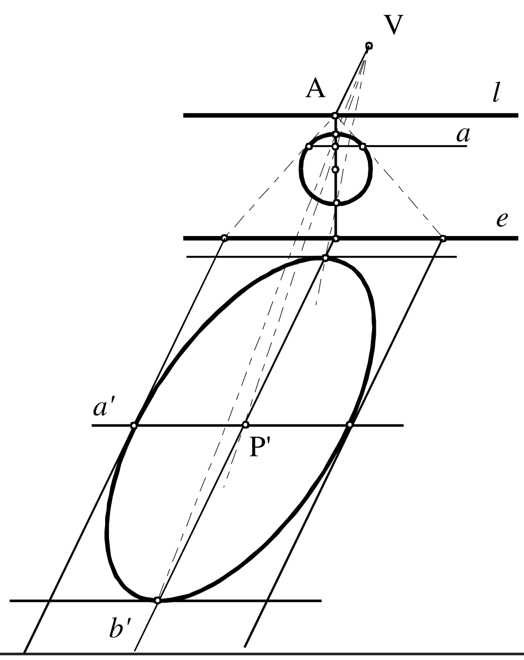
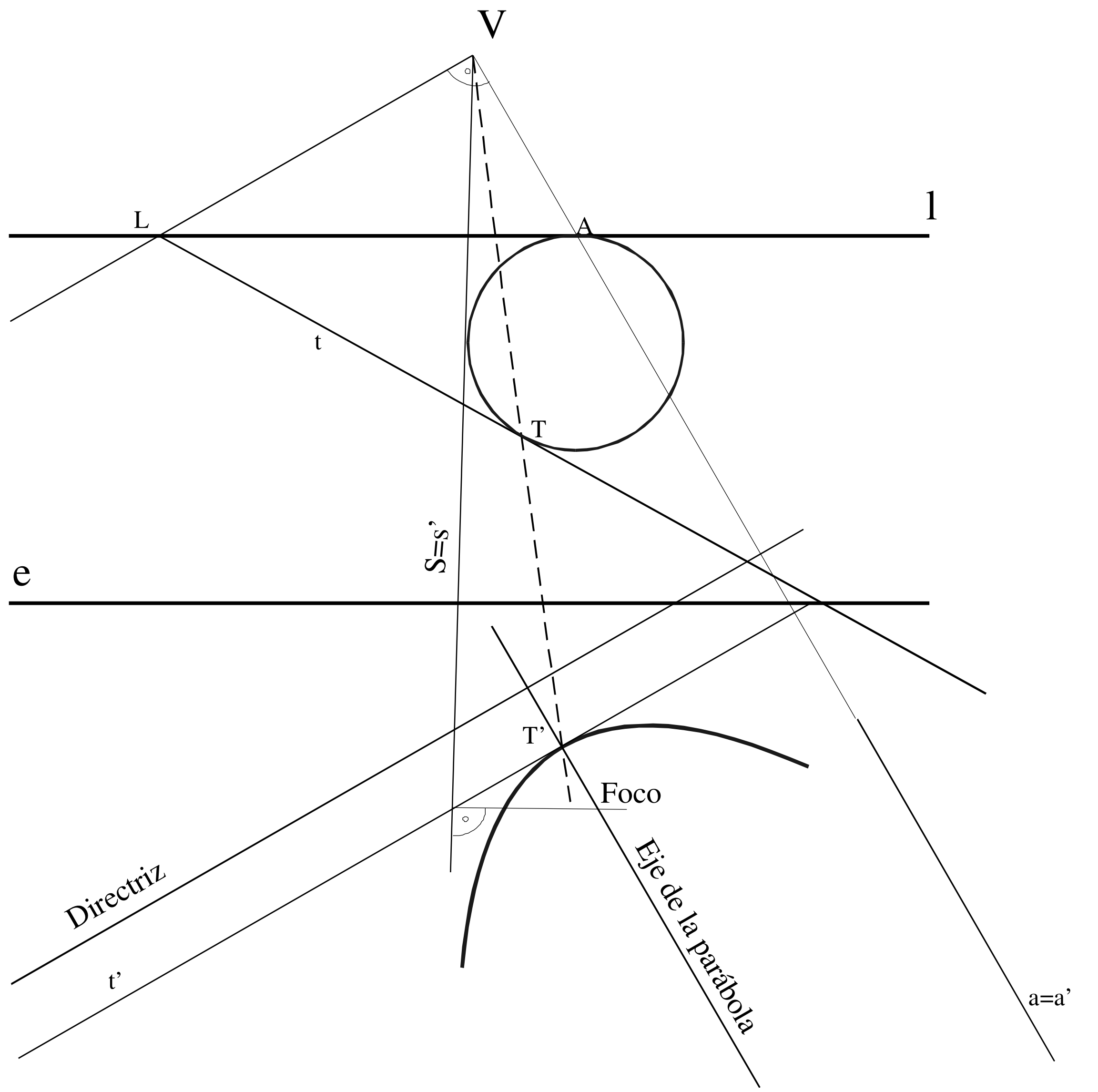


Figura 20. Trazado de una elipse por homología con una circunferencia. En primer lugar, se encuentra el punto P, polo de la recta *l* respecto de la circunferencia. Basta tomar ahora dos rectas en la circunferencia conjugadas respecto de *l* y hallar las homólogas para tener dos diámetros conjugados de la elipse.

Figura 21 Construcción de una parábola por homología con una circunferencia tangente a *l* en el punto A.Trazamos la recta a que pasa por V y por A. Esta recta, por pasar por V es doble, es decir coincide con su homóloga y nos da la dirección del eje de la parábola. Trazamos por el vértice su perpendicular hasta cortar a *l* en el punto L. Desde éste se traza la recta t tangente a la circunferencia en T. Su homóloga t' será tangente a la parábola en su vértice y T' será el vértice de esta.



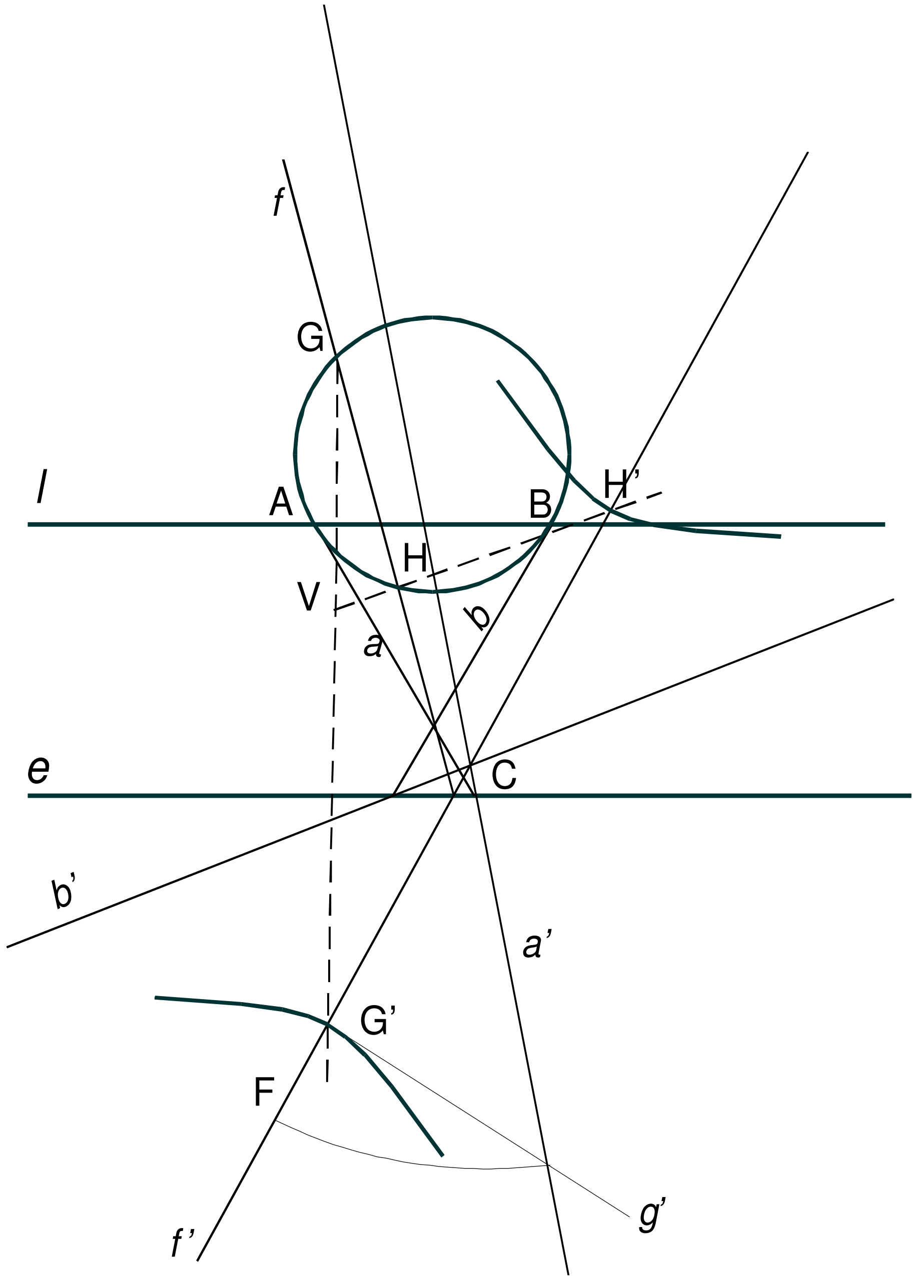
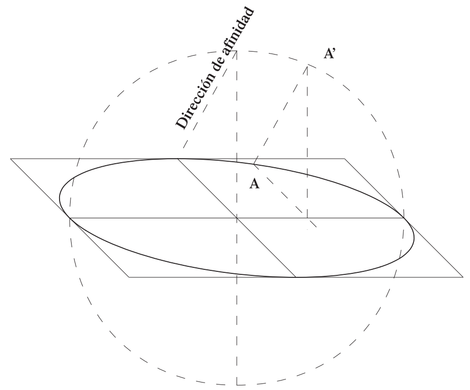


Figura 22. Construcción de una hipérbola por homología con una circunferencia. Dados los elementos de la homología y una circunferencia secante al eje l en A y B. Trazamos las rectas a y b tangentes a la circunferencia en A y B. Hallamos sus homólogas a' y b'que resultan ser las asíntotas por ser tangentes a la homóloga en el infinito. Una de las bisectrices de los ángulos que forman a' y b' será f', eje focal de la hipérbola.Encontramos f, cuyos puntos G y H intersección con la circunferencia resultan homólogos de los vértices de la hipérbola. Para hallar el foco basta tener en cuenta que la distancia focal del centro C de la hipérbola a cada foco es igual a distancia de C al punto M de intersección de la asíntota a' con la tangente g' en el vértice G'.

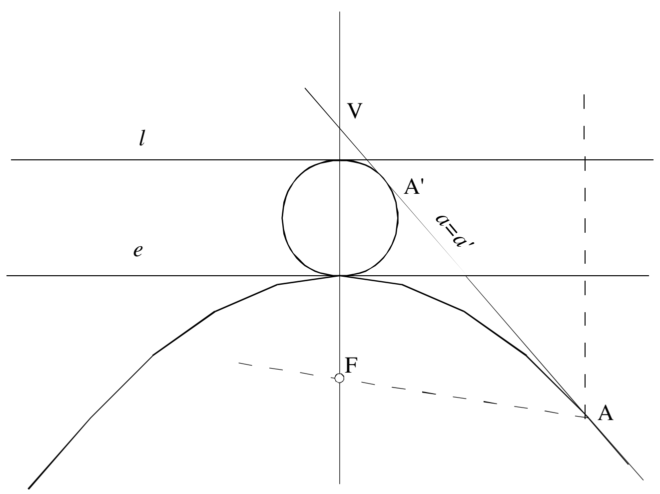
Para resolver los siguientes cuatro problemas se puede emplear una circunferencia homóloga a la cónica y esolverlo sobre ella. Estos cuatro problemas son:

1. Trazado de la tangente a una cónica en un punto dado de ella.
2. Trazado de la tangente desde un punto exterior a una cónica.
3. Trazado de la tangente a una cónica paralela a una dirección dada.
4. Puntos de intersección de una recta secante a la cónica.

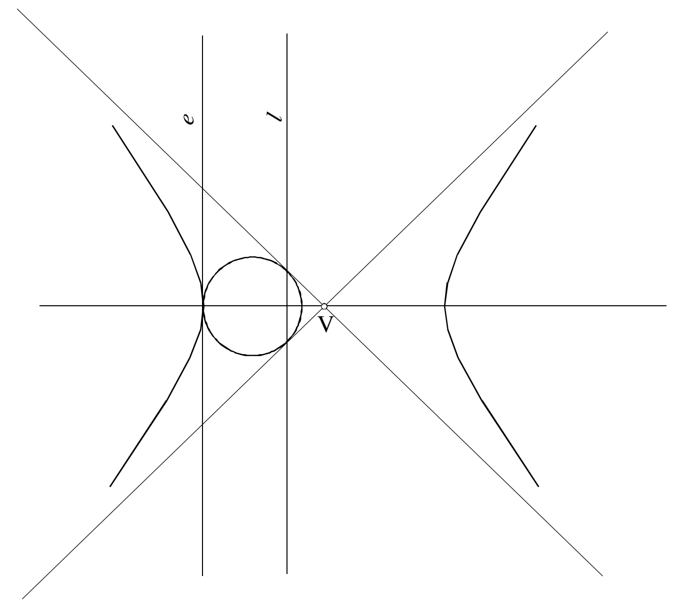
En el caso de la elipse se empleará una afinidad por su mayor sencillez. Si se conocen en general dos diámetros conjugados, una posibilidad es construir la circunferencia de diámetro igual al diámetro mayor de los dos y centro en el centro de la elipse. Se establece la dirección de afinidad por el punto de intersección de la perpendicular al diámetro mayor con dicha circunferencia que resultará afín del extremo del otro diámetro.



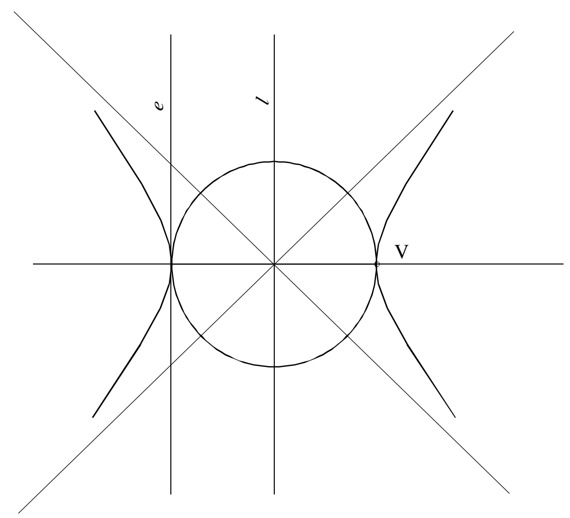
En el caso de la parábola, dado que el primero de los problemas se puede resolver encontrando la bisectriz del ángulo formado por la recta del punto al foco y de la recta perpendicular a la directriz; podemos construir una circunferencia homóloga de la parábola como sigue. Tomamos un punto arbitrario de ella -tanto más lejos cuanto mayor queramos que sea la circunferencia- y encontramos su tangente *t* y trazamos la circunferencia con centro sobre el eje de la parábola y tangente a *t* en A y B y a la parábola en su vértice. Los elementos de la homología serán: el eje, la tangente a la parábola en su vértice; la recta límite, la paralela a esta y a la directriz que pasa por el punto de corte de la circunferencia con el eje de la parábola. Finalmente, el vértice será el punto donde *t* al eje de la parábola.



En la hipérbola al conocer las asíntotas (tangentes en el infinito) es trivial aplicar el caso anterior basta trazar la circunferencia tangente a las asíntotas y a uno de los vértices de la hipérbola. El eje de la homología será la recta perpendicular al eje de la hipérbola que pasa por su vértice, la recta límite tendrá obviamente la misma dirección y pasará por los puntos de tangencia de la circunferencia con las asíntotas y el vértice de la homología será el centro de la cónica.



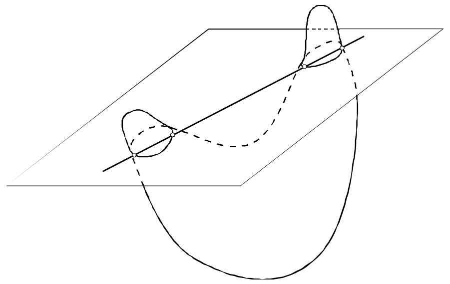
Otra posibilidad, si la hipérbola es equilátera, que permite construir una circunferencia mayor es trazarla con centro en el centro de la cónica y que pase por los vértices de la hipérbola. El eje será el mismo que antes y la recta límite pasará por el centro de la cónica.El vértice de la homología será el otro vértice de la hipérbola.



Intersección de recta con superficie

En general, para encontrar la intersección de una recta con una superficie existe un método general que consiste en incluir la recta en un plano, hallar la sección de la superficie por dicho plano y sobre ella determinar la intersección buscada. El plano en que incluímos la recta debe ser tal que la sección de la superficie por el plano sea fácilmente calculable.

Figura 23



Así por ejemplo para hallar la intersección de una recta con un cono o con una pirámide elegiremos un plano definido por la propia recta y el vértice. Para hallar la intersección con un cilindro o un prisma se emplea un plano auxiliar que contiene a la recta y es paralelo a las generatrices del cilindro. Obsérvese que ser paralelo a las generatrices del cilindro equivale a contener el «vértice» del cilindro que se encuentra infinitamente alejado en esa dirección. En el caso de la esfera ya vimos que podríamos elegir un plano que contuviera el centro de esta.

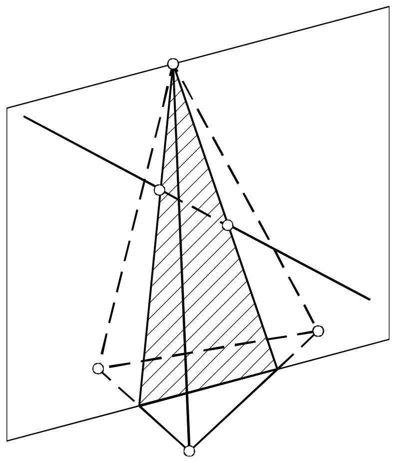


Figura 24

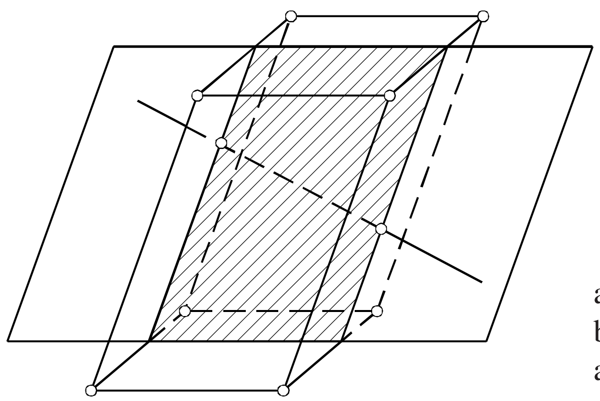


Figura 25

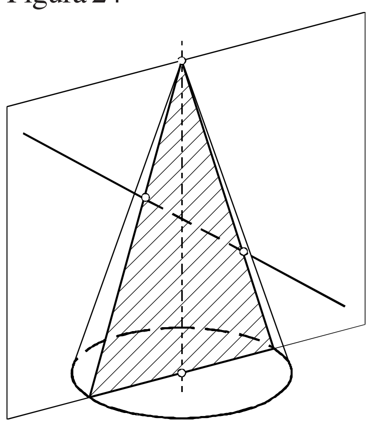


Figura 26

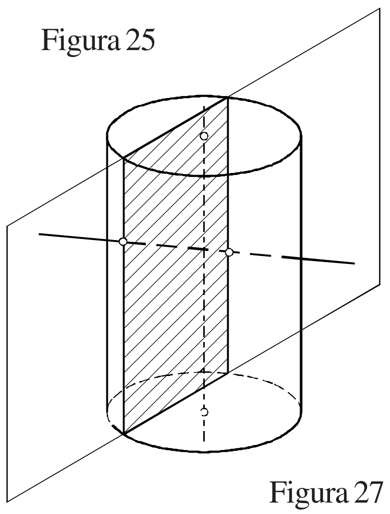


Figura 27

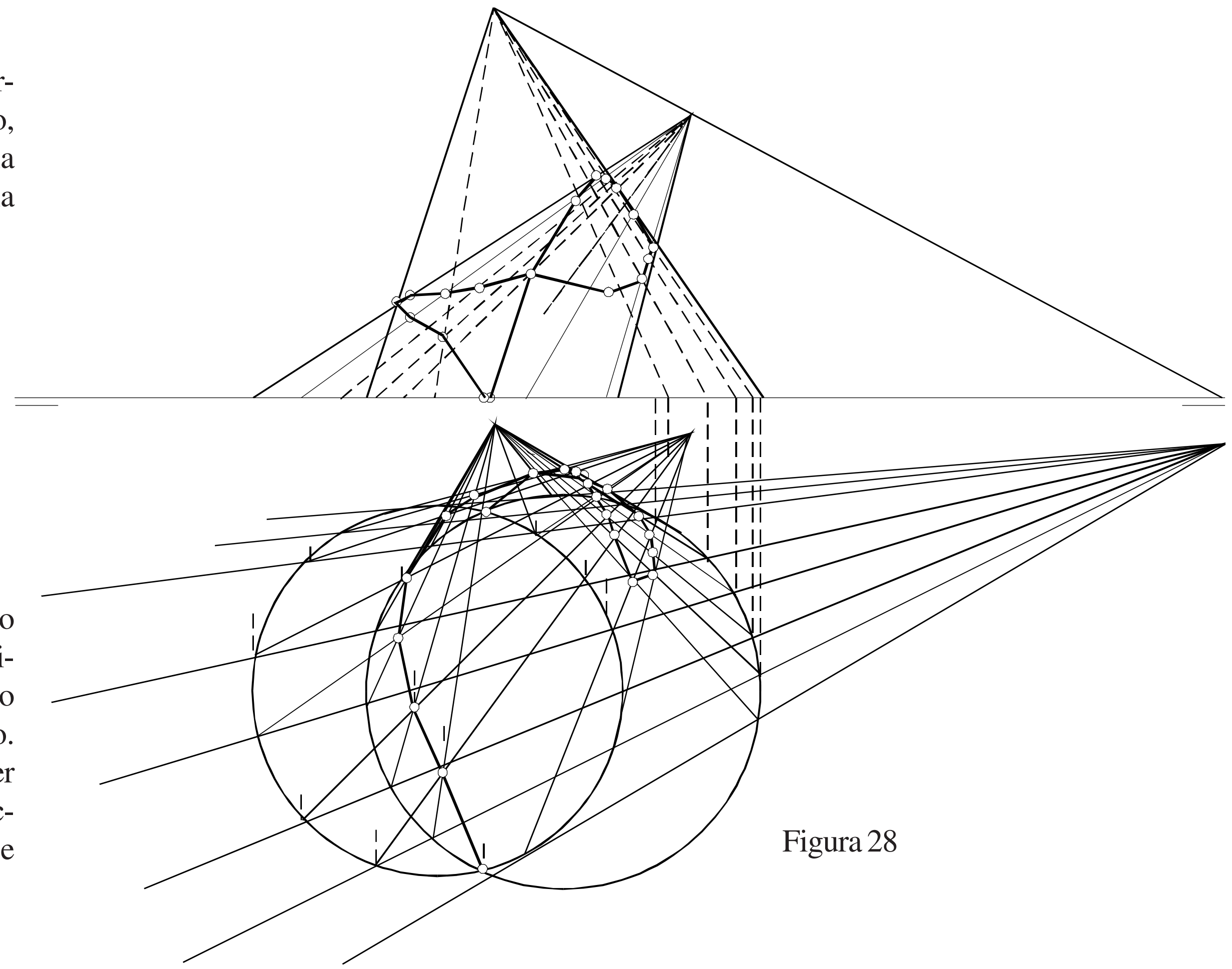


Figura 28

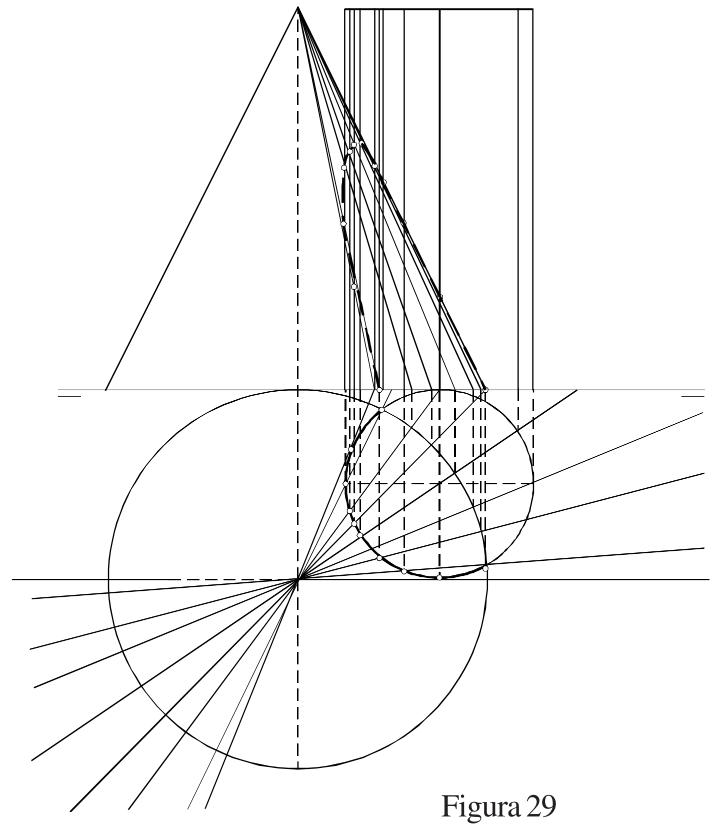


Figura 29

Intersecciones de superficies

La intersección de dos superficies se resuelve en general recurriendo al empleo de planos auxiliares cuyas intersecciones con las superficies problema sean conocidas o de fácil construcción. Dado uno de estos planos auxiliares y sus intersecciones con ambas superficies, los puntos comunes a ambas serán puntos de la solución buscada. Empleando otros planos auxiliares se van obteniendo más puntos de la intersección de las superficies.

La elección de los planos auxiliares viene condicionada por la fácil construcción de las secciones de estos con las superficies. Así por ejemplo en la figura 28 se muestra la intersección de dos conos. Para hallarla se recurre a un haz de planos auxiliares que contengan a los dos vértices. En las figuras 29 y 30 se muestran las intersecciones de cilindro con cono. Los planos auxiliares para este caso son paralelos a la generatriz del cilindro y pasan por el vértice del cono. En el caso de la figura 29, por ser los planos secantes además proyectantes resulta mucho más fácil de realizar.

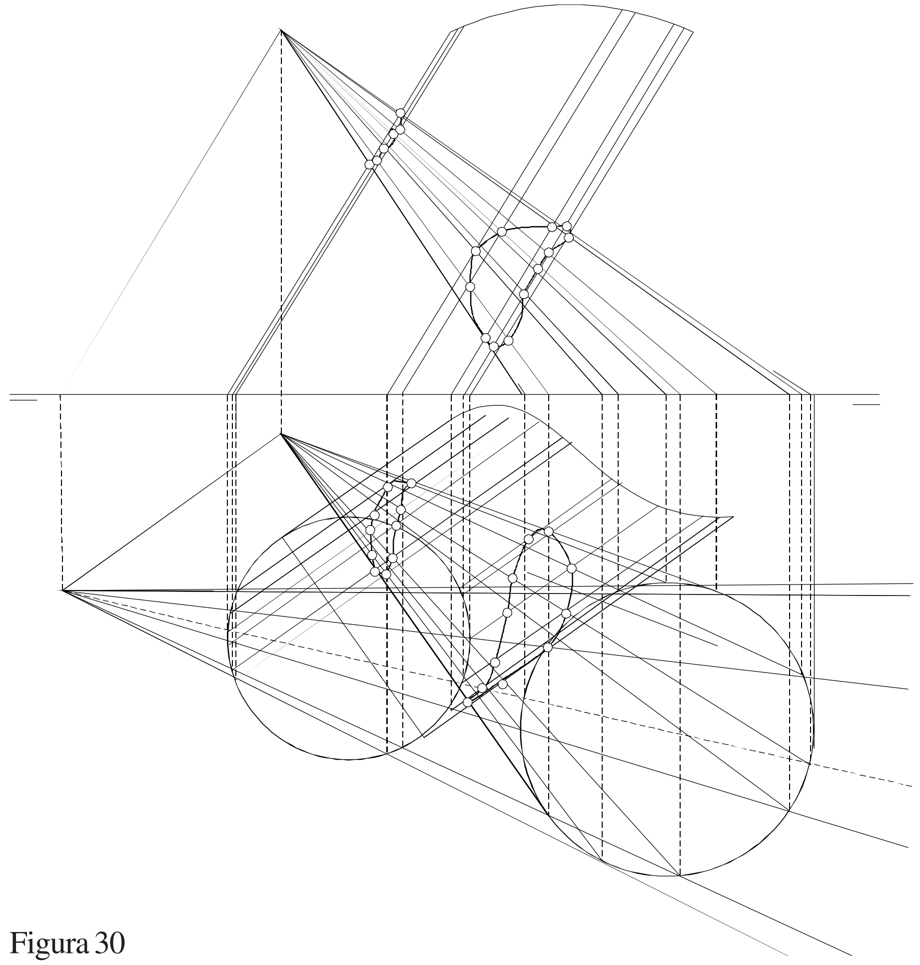


Figura 30

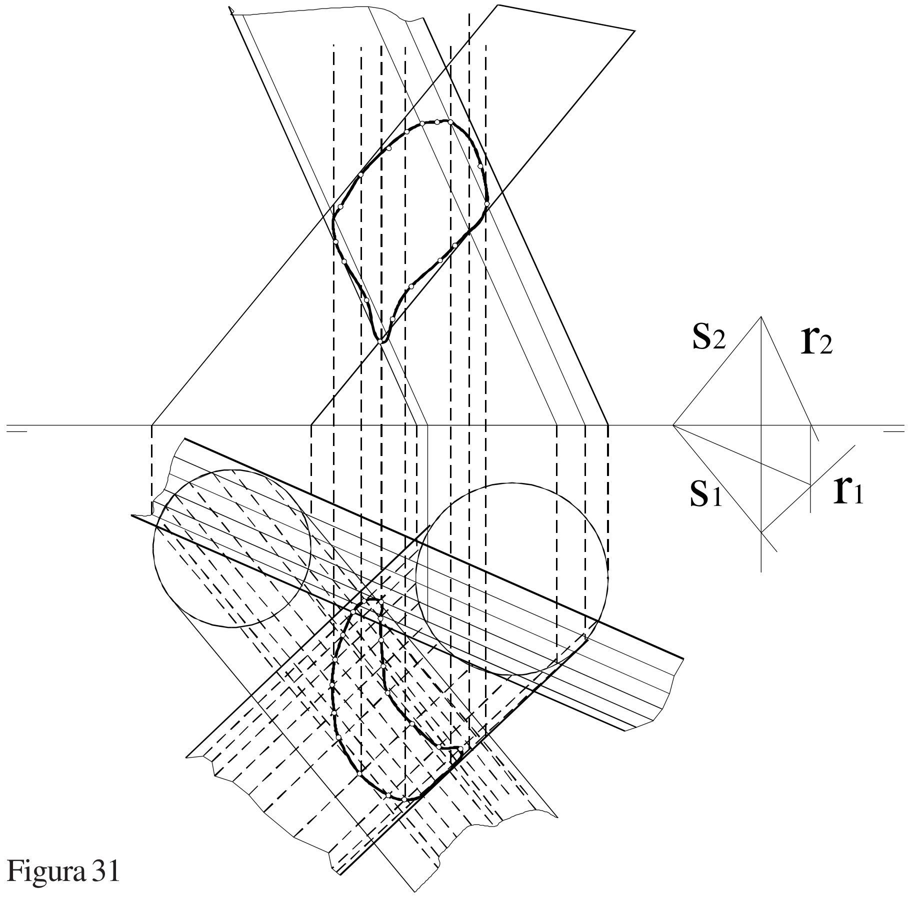


Figura 31

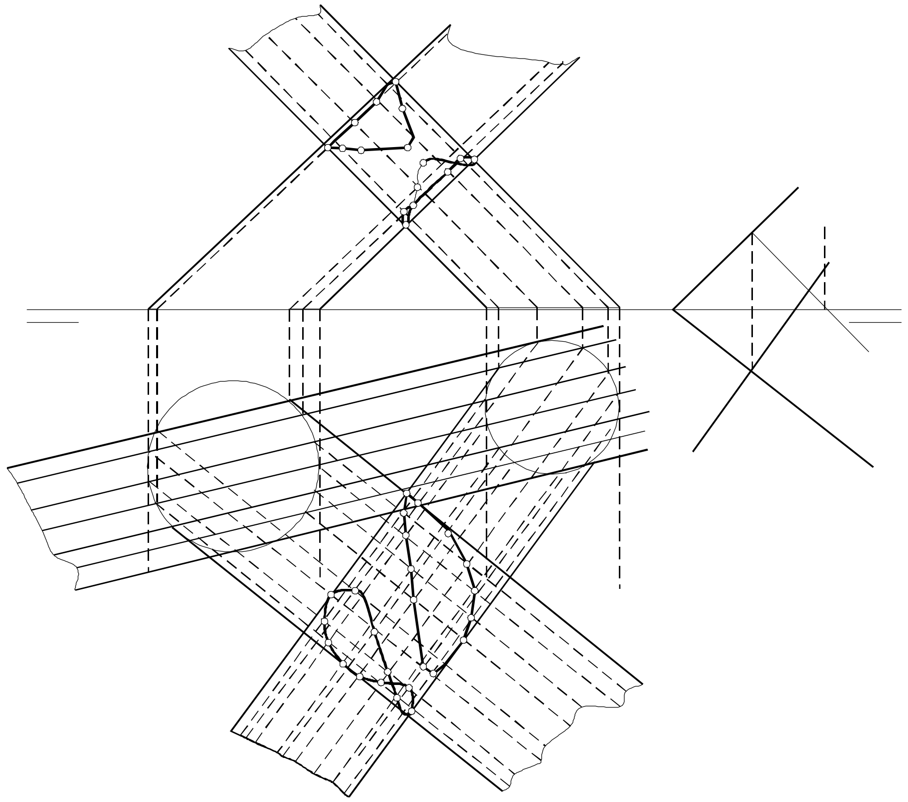


Figura 32

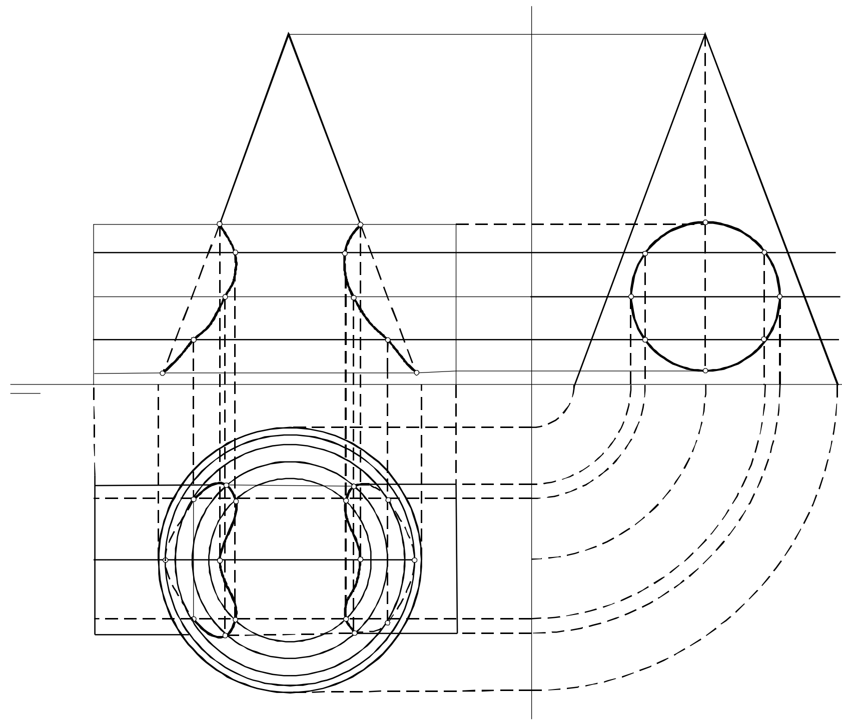


Figura 35

Figura 33

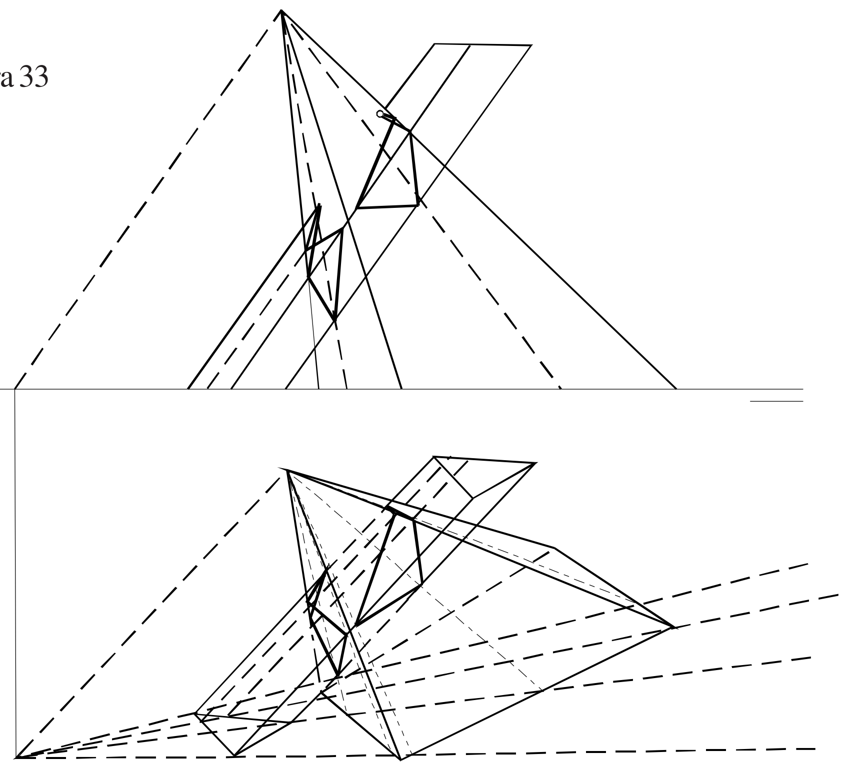
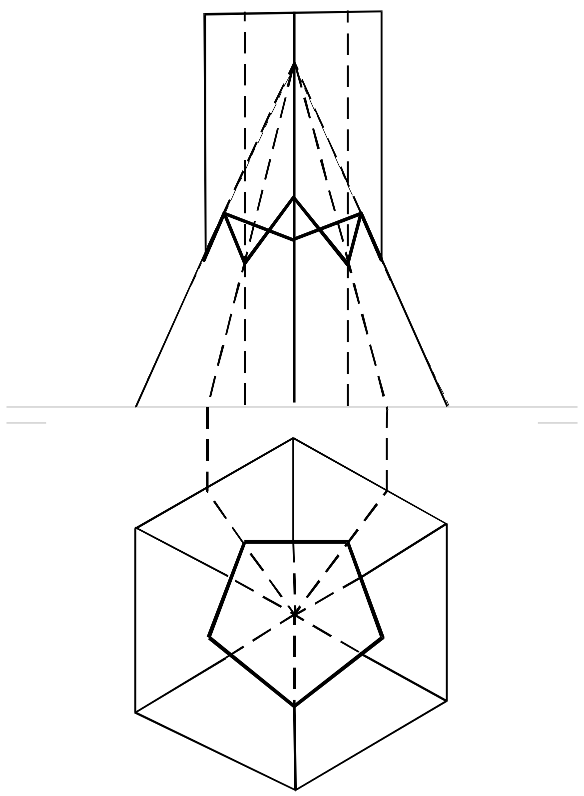


Figura 34



En la intersección de dos cilindros (figuras 31 y 32) se emplean planos auxiliares paralelos a ambas generatrices. En el caso de intersección de superficies poliédricas con caras planas el trazado se simplifica puesto que hallando los encuentros de aristas y caras queda toda la intersección definida. Por otro lado los planos auxiliares se eligen siguiendo los mimos pricipios. Así en las figuras 33 y 34 se muestran intersecciones de pirámide y prisma empleando como planos auxiliares planos que contienen al vértice de la pirámide y son paralelos a las generatrices del prisma. Estas intersecciones de poliedros pueden incluso resultar de trazado muy sencillo si se encuentran en posiciones especiales como en la figura 34.

Puede también darse el caso de que sea más fácil el empleo de familias de planos diferentes de los mencionados como en el caso de la figura 35. En esta se ha empleado una familia de planos horizontales por ser fácil determinar su sección con ambas superficies.

Las intersecciones de superficies pueden ser de tres tipos: de mordedura (figura 36), resultando una única curva; de penetración total (figura 37), con dos curvas inconexas como intersección y tangencia (figura 38), con una curva con un punto de cruce o tangencia.

Figura 36. MORDEDURA

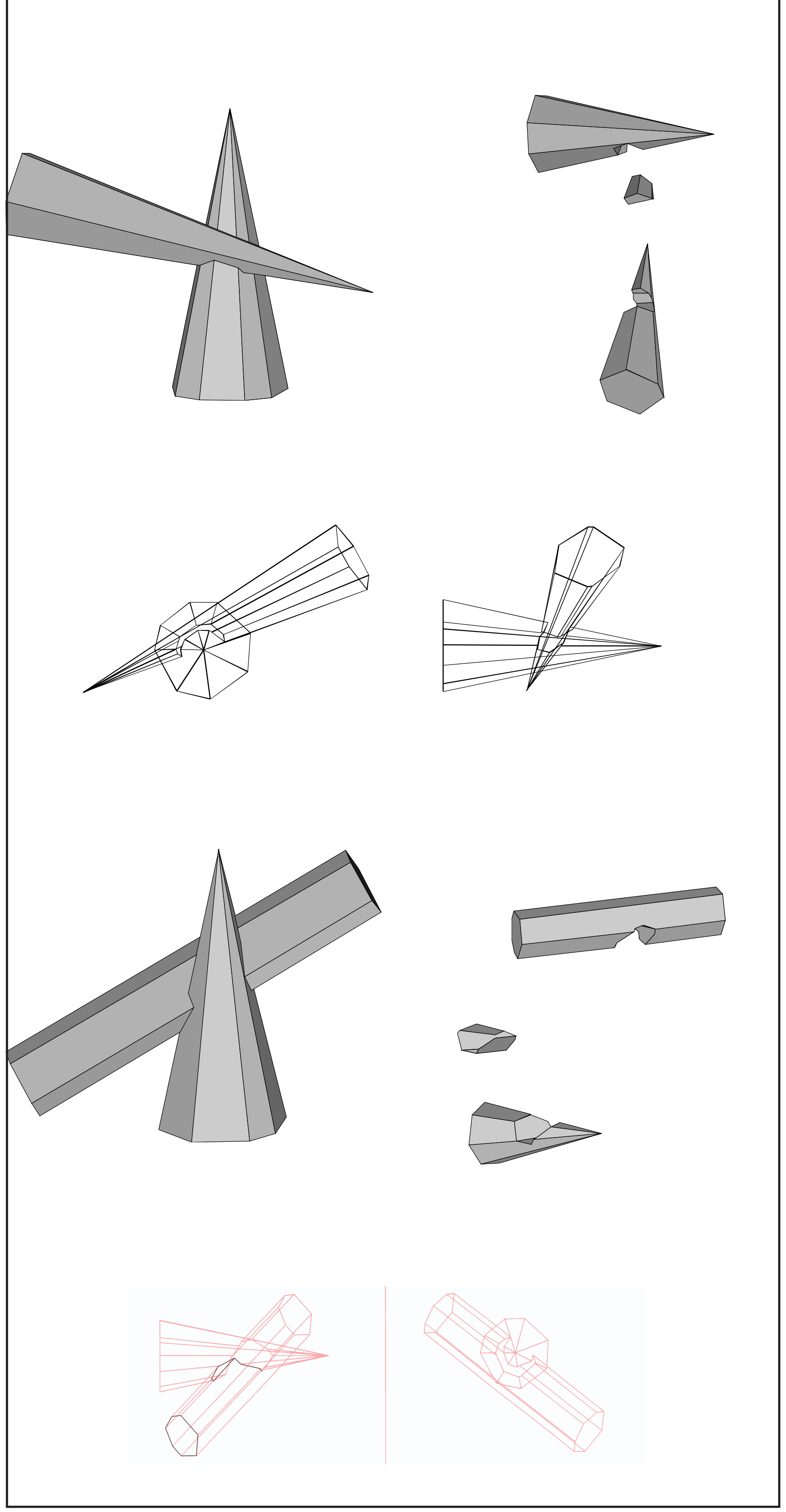


Figura 37. PENETRACIÓN TOTAL

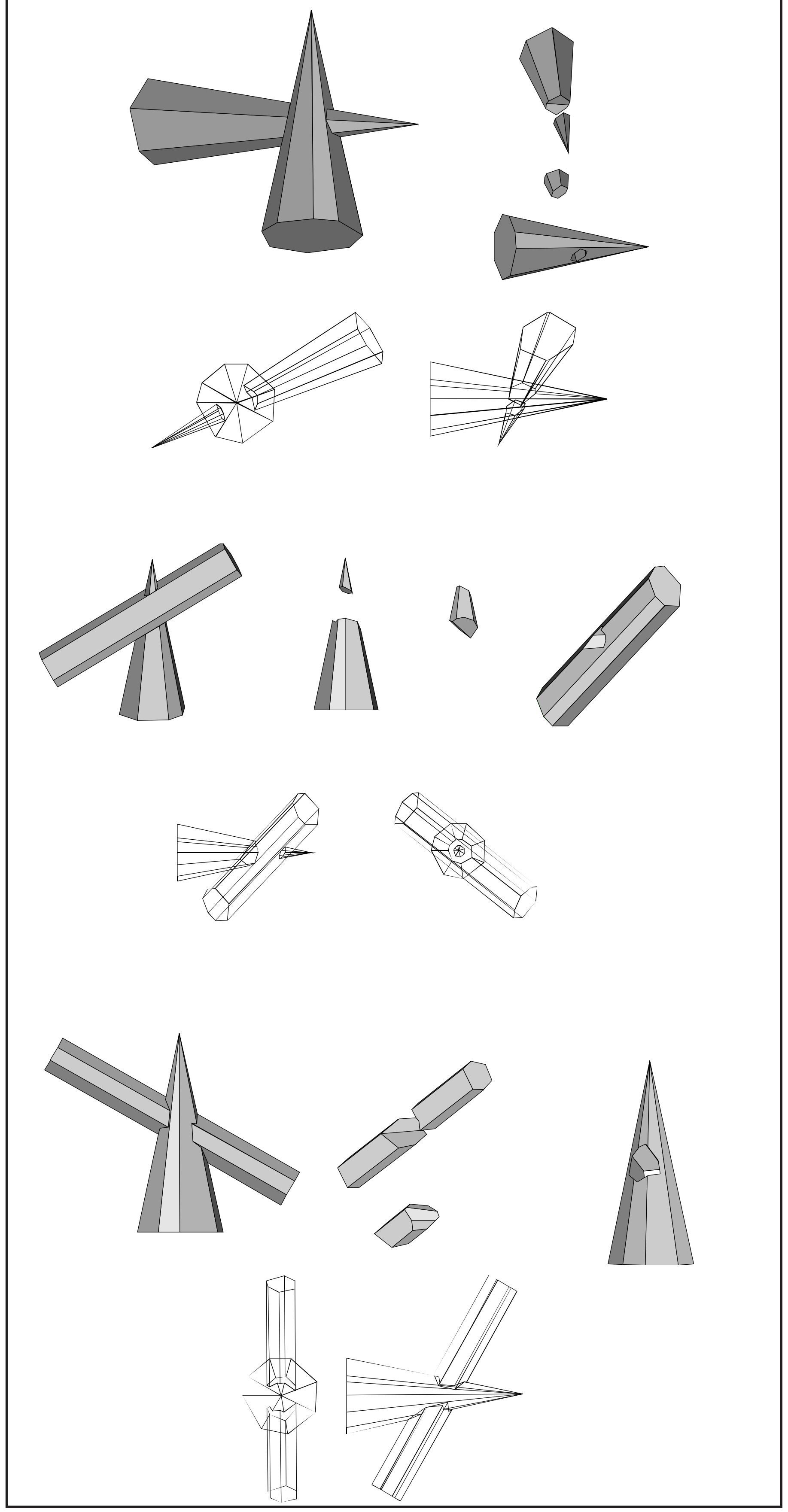
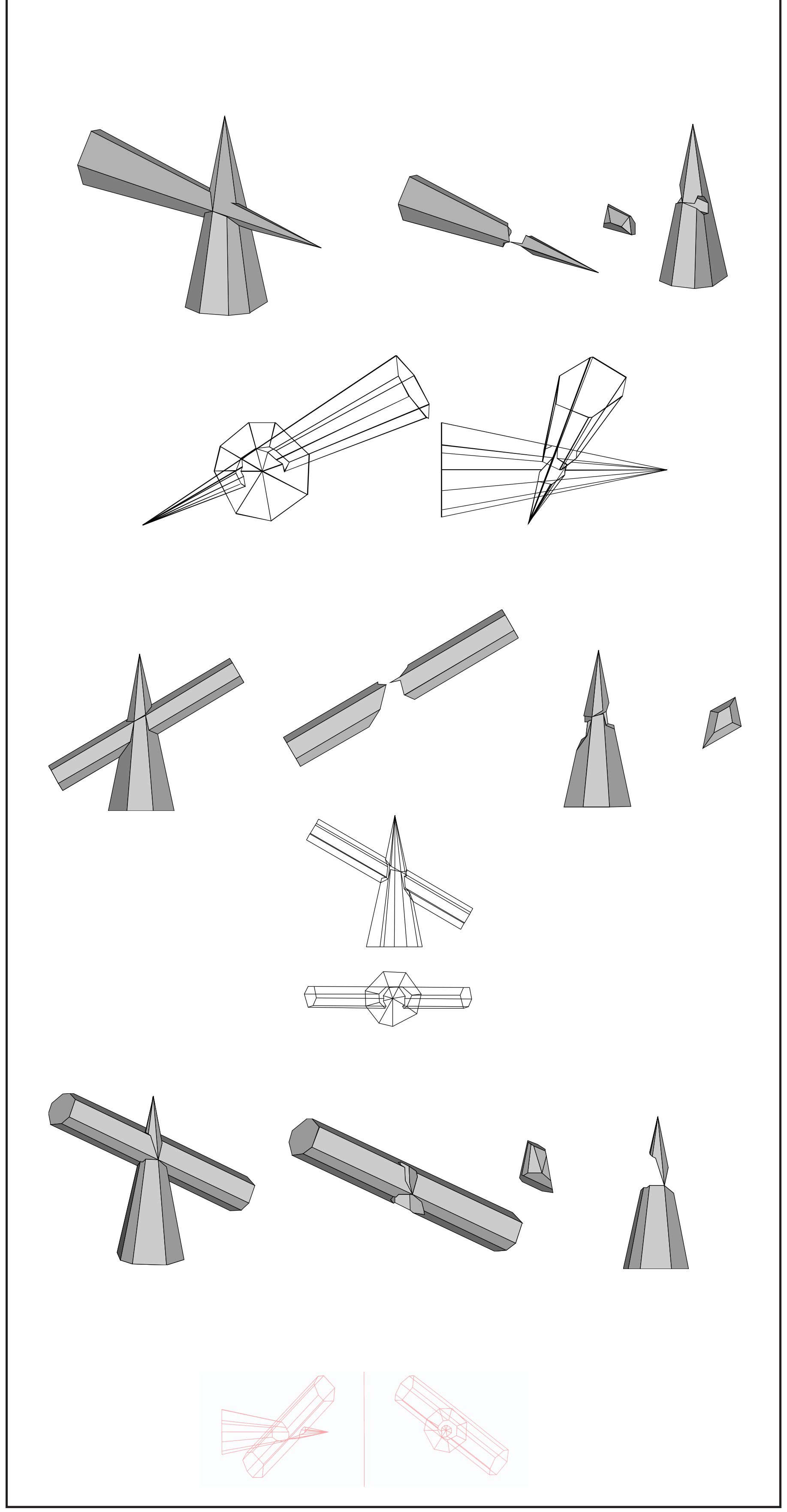


Figura 38. TANGENCIA



Sombras

El estudio de sombras clásico en la geometría ingenieril consiste únicamente en distinguir zonas iluminadas de zonas de sombras para una determinada iluminación bien con foco puntual, bien con foco en el infinito. Se prescinde de estudiar la reflexión y difusión de la luz al incidir en la superficie así como de la diferente iluminancia que reciben zonas con orientaciones diferentes. En sistemas CAD, no obstante, la tendencia es a producir cada vez superficies más realistas teniendo en cuenta la reflexión y dispersión de la luz incidente sobre una superficie e incluso los tratamientos de generación de superficies fractales realistas. En este punto estudiaremos sólo el fundamento clásico de sombras.

La luz se propaga en forma rectilínea de forma que si tenemos un foco de luz, la frontera entre la zona iluminada de una superficie y su zona no iluminada (*sombra propia*) vendrá determinada por la curva de tangencia con un cono con vértice en el foco de luz. La intersección de este cono con un plano cualquiera con tal que la superficie y el foco queden en el mismo semiespacio será la *sombra arrojada* sobre este plano. En la figura 39 se muestra la sombra producida por un foco de luz situado sobre una esfera, tanto la propia como la proyectada sobre el plano horizontal.

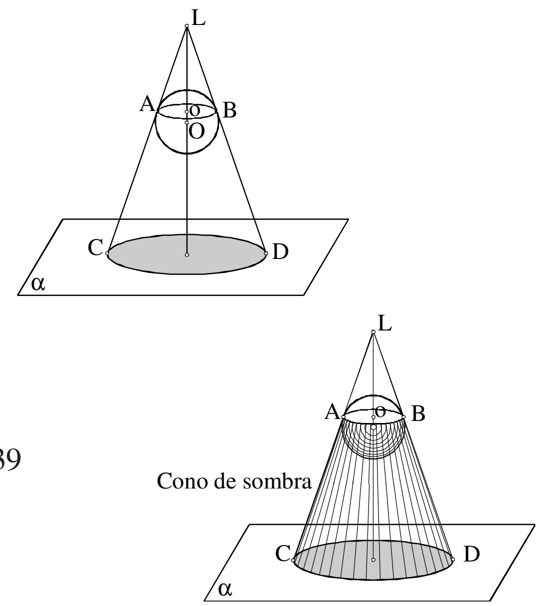


Figura 39

La sombra proyectada sobre un plano no guarda relación biunívoca con el objeto iluminado. De hecho, como se mostraba en la figura 15, dada una esfera y un vértice del cono de sombra, existen otras esferas también tangentes al mismo cono y por tanto con la misma sombra proyectada. Además, según el citado teorema de Landelin, dado un plano secante del cono y tangente a una esfera, la elipse intersección del plano con el cono resulta tener un foco en el punto F_1 de tangencia de la esfera y el plano, siendo el otro foco el punto de tangencia de otra de estas esferas tangente al mismo cono. Como es evidente pues, la propia elipse tiene en este caso la misma sombra arrojada que las esferas.

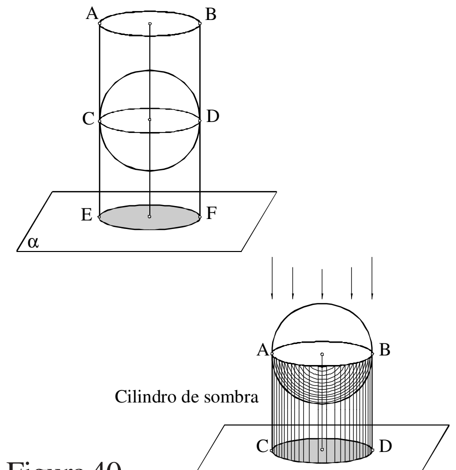


Figura 40

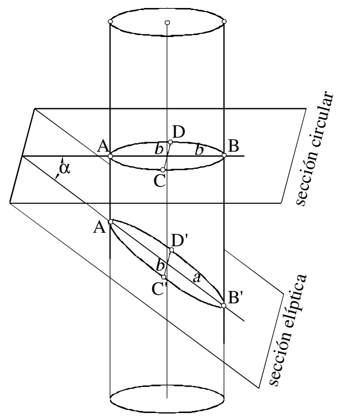


Figura 41

En el caso de luz proviniente de un foco infinitamente alejado, en lugar de cono de sombra deberemos hablar de cilindro de sombra como se indica en la figura 40. En este caso todas las esferas que proyectan la misma sombra tienen el mismo diámetro como puede deducirse de la figura 15. La sombra cilíndrica proyectada de una esfera sobre un plano cualquiera será en general una elipse tal como se muestra en la figura 41, correspondiendo a la sección plana de un cilindro circular.

La construcción de la sombra propia y la sombra proyectada sobre los planos del diedro se realiza en el sistema diédrico fácilmente mediante cambio de plano de proyección. En la figura 42, dada una dirección L de luz incidente, cambiando de plano horizontal de proyección se consigue que la luz incida en una dirección horizontal de forma que la frontera de la sombra propia se proyecta en un diámetro del contorno aparente sobre el nuevo plano horizontal. Basta además trazar rectas paralelas a la nueva proyección horizontal de la dirección de la luz y levantarlas desde la línea de tierra para construir la sombra proyectada sobre el plano vertical de proyección. En la figura 43 se realiza el mismo proceso para hallar la sombra sobre el plano horizontal.

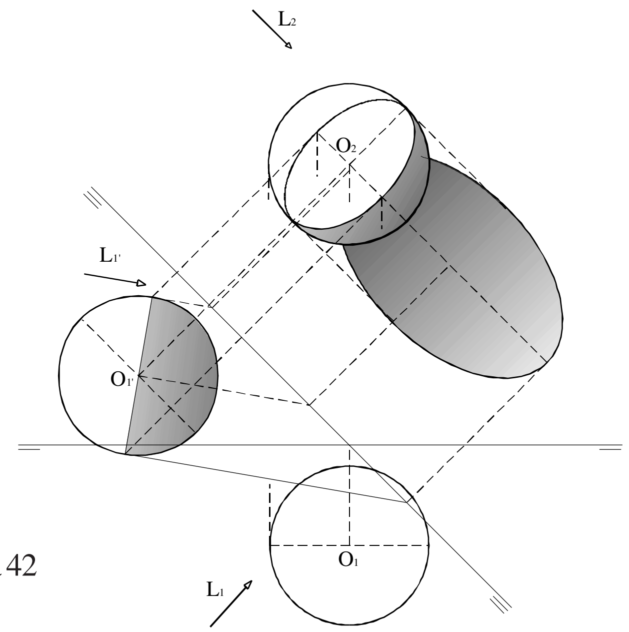
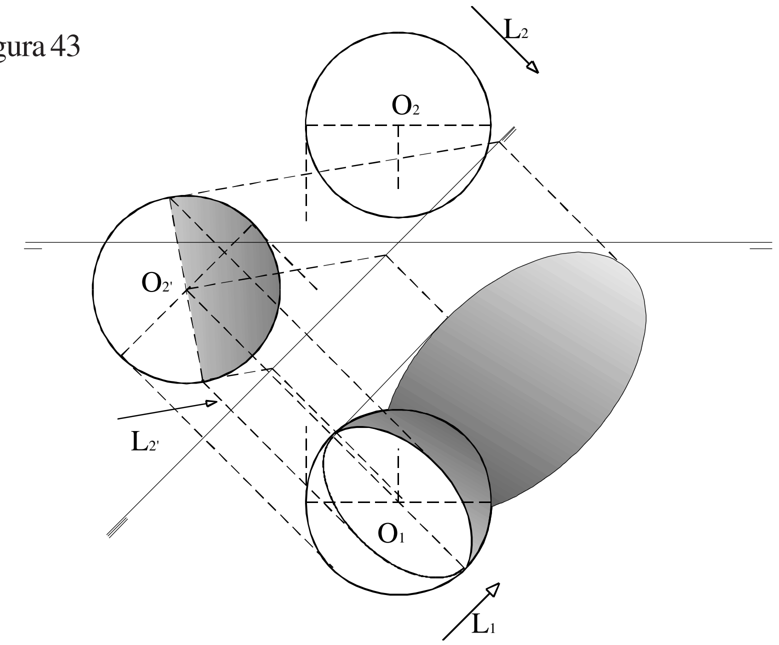


Figura 42

Figura 43



En la figura 44 se muestra un caso en el que la sombra proyectada sobre el diedro cubre parte del plano horizontal y parte del vertical, debiéndose hallar por separado. En la línea de tierra se encontrarán ambas sombras. Se muestra por separado las proyecciones con solo la sombra propia para mayor claridad.